SUBSIDIA CLASSICA

12

Iamblichos von Chalkis in Koilesyrien

Einführung des Nikomachos in die Arithmetik

Übersetzt und kommentiert von

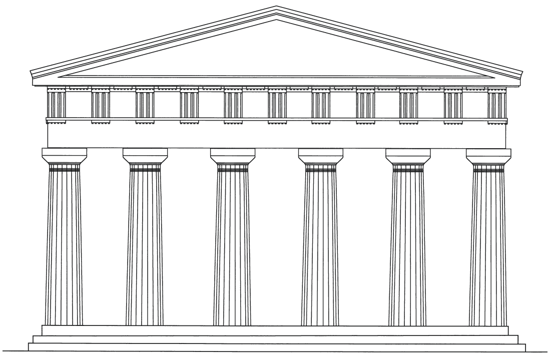
Eberhard Knobloch und Otto Schönberger

IAMBLICHOS VON CHALKIS IN KOILESYRIEN

ÜBER DIE EINFÜHRUNG DES NIKOMACHOS IN DIE ARITHMETIK

ÜBERSETZT INS DEUTSCHE
VON
EBERHARD KNOBLOCH UND OTTO SCHÖNBERGER

NACHWORT, ANMERKUNGEN UND GLOSSAR
VON
EBERHARD KNOBLOCH



SUBSIDIA CLASSICA
Band 12

Iamblichos von Chalkis in Koilesyrien

Über die Einführung des Nikomachos in die Arithmetik

Übersetzt ins Deutsche
von
Eberhard Knobloch und Otto Schönberger

Nachwort, Anmerkungen und Glossar
von
Eberhard Knobloch

Verlag Marie Leidorf GmbH · Rahden/Westf.
2012

https://doi.org/10.18453/rosdok_id00003346

236 Seiten

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Iamblichos von Chalkis in Koilesyrien ; über die Einführung des Nikomachos in die Arithmetik ... / übersetzt von Eberhard Knobloch und Otto Schönberger.
Rahden/Westf.: Leidorf, 2012
(Subsidia Classica ; Bd. 12)
ISBN 978-3-86757-184-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie.
Detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier

Verlag Marie Leidorf GmbH
Geschäftsführer: Dr. Bert Wiegel
Stellerloh 65 · D-32369 Rahden/Westf.
Tel: +49/(0)5771/ 9510-74
Fax: +49/(0)5771/ 9510-75
E-Mail: info@vml.de
Internet: http://www.vml.de

ISBN 978-3-86757-184-5
ISSN 1863-9496

Umschlagentwurf: Konrad Hitzl, Tübingen
PC-Texterfassung und Redaktion: Eberhard Knobloch, Berlin und Otto Schönberger, Gerbrunn
Satz und Layout: Svenja Martens, Rostock

Druck und Produktion: DSC Bevermann GmbH, 49196 Bad Laer

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

ΙΑΜΒΛΙΧΟΥ ΧΑΛΚΙΔΕΩΣ ΤΗΣ ΚΟΙΛΗΣ ΣΥΡΙΑΣ

Περὶ τῆς Νικομάχου ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς

[3] Ἀρχόμενοι τοῦ ἰδίου λόγου περὶ τῶν ἐν μέρεσι διωρισμένων μαθημάτων ἀπὸ τῆς ἀριθμητικῆς ἀρχόμεθα· αὕτη γὰρ φύσει πρεσβυτέραν ἔχει τὴν θεωρίαν τῷ περὶ ἁπλούστερα πραγματεύεσθαι καὶ ἀρχηγικώτερα, διόπερ καὶ ὁ περὶ αὐτῆς λόγος προηγεῖται τῶν ἄλλων μαθημάτων. ἔστι δὴ καὶ οὗτος οὐχ ἁπλοῦς, ἀλλὰ πολυειδής· ὅσα γάρ ἐστι γένη τῶν ὄντων, περὶ πάντα συνδιαιρεῖται καὶ τὰς αὐτὰς δέχεται διαιρέσεις.

ἀλλὰ πρό γε τῶν ἐν ἄλλοις θεωρουμένων αὐτὸν καθ' αὑτὸν τὸν ἀριθμὸν θεωρεῖν χρή, ἀφ' οὗ δυνησόμεθα καὶ τὸν ἐν τῇ φύσει ἢ τοῖς ἤθεσιν ἢ τοῖς εἴδεσιν ἢ ὅλως πᾶσι τοῖς οὖσιν ἐπισκοπεῖν. διὰ δὴ τοῦτο παραλαμβάνειν δεῖ τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην τῶν ἀριθμῶν. καὶ γὰρ ὡς ἐν ὑποθέσει δεῖ προκεῖσθαι ταύτην· προϋποκειμένης γὰρ αὐτῆς, καὶ τὰς ἄλλας παραγίγνεσθαι ἐπιστήμας δυνατόν, ἄνευ δὲ ταύτης οὐδὲ ἐκεῖναι παραγίγνονται.

καὶ πρὸς μάθησιν δὲ ἐντεῦθεν ἄρχε**[4]**σθαι δεῖ· προδιωρισμένων γὰρ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασιν ἀναγκαίων θεωρημάτων, δι' αὐτῶν ὁδηγούμεθα πρὸς τὰς τελειοτέρας τῶν ἀριθμῶν θεωρίας· δῆλον γὰρ ὅτι συμφωνοῦσι πρὸς ταύτην ἐκεῖναι. τὴν δ' ἐπίνοιαν αὐτῆς, οὐχ ὡς ἐν ψιλοῖς ἐννοήμασιν, οὐδ' ὡς ὑστέραν ἐπὶ τοῖς αἰσθητοῖς ἐπιγιγνομένην, οὐδ' ὡς φαντάσματά τινα ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἀποσυλῶσαν καὶ χωρίζουσαν, ἀλλ' ὡς κοινὰ νοήματα δυναμένην πᾶσιν ἐφαρμόζειν τοῖς ὁπωσοῦν ὑφεστηκόσιν ἀριθμοῖς, οὕτως αὐτὴν προΐστασθαι ἄξιον. περὶ δὴ τῆς τοιαύτης μαθηματικῆς ἀριθμητικῆς πρόκειται ἡμῖν νυνὶ λέγειν.

IAMBLICHOS VON CHALKIS IN KOILESYRIEN

Über die Einführung des Nikomachos in die Arithmetik

Einleitung

[3] Indem wir unsere eigene Darstellung der einzeln definierten mathematischen Wissenschaften beginnen, befassen wir uns zuerst mit der Arithmetik <Zahlentheorie>, denn diese besitzt von Natur aus die ranghöhere Erkenntnisweise, da sie sich mit Einfacherem und Ursprünglicherem beschäftigt, weshalb ihre Darstellung auch der der übrigen mathematischen Wissenschaften vorangeht. Auch diese Darstellung ist nun nicht von einfacher Natur, sondern vielgestaltig. So viele Gattungen des Seienden es nämlich gibt, auf alle wird sie aufgeteilt und nimmt dieselben Einteilungen in sich auf. Doch müssen wir vor dem, was an anderem betrachtet wird, die Zahl selbst an sich betrachten, von wo aus wir dann auch die Zahl in der Natur oder den Sitten oder den Gestalten oder überhaupt in allem Seienden werden untersuchen können. Deshalb also müssen wir die mathematische Wissenschaft der Zahlen <vor allem> erlernen. Diese Wissenschaft muss nämlich auch wie als Grundlage vorhanden sein. Bildet sie nämlich die vorausgehende Grundlage, können auch die anderen Wissenschaften hinzukommen, ohne sie aber können auch jene nicht hinzukommen.

Auch im Hinblick auf den Lernvorgang muss man aber **[4]** mit Arithmetik beginnen; sind nämlich die in den mathematischen Wissenschaften notwendigen Sätze einmal bestimmt, so werden wir mit ihrer Hilfe zu vollkommeneren Betrachtungen der Zahlen hingeführt; ist es doch klar, dass jene mit dieser in Einklang stehen.

Ihre Erkenntnisweise aber muss man so vorstellen: Sie liegt nicht in bloßen Überlegungen, entsteht nicht erst sekundär am sinnlich Wahrgenommenen, holt auch nicht irgendwelche Vorstellungen aus den sinnlich wahrgenommenen Gegenständen heraus, um sie separat zu setzen, sondern sie vermag allgemeine Denkgrundlagen allen irgendwie existierenden Zahlen anzupassen. Über die so geartete mathematische Arithmetik zu sprechen, ist aber nun unsere Aufgabe.

Εὑρίσκομεν δὴ πάντα κατὰ γνώμην τῷ Πυθαγόρᾳ τὸν Νικόμαχον περὶ αὐτῆς ἀποδεδωκότα ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ τέχνῃ. ὅ τε γὰρ ἀνὴρ μέγας ἐστὶν ἐν τοῖς μαθήμασι καὶ καθηγεμόνας ἔσχε περὶ αὐτῶν τοὺς ἐμπειροτάτους ἐν τοῖς μαθήμασι, καὶ ἄνευ τούτων τάξιν θαυμαστὴν καὶ θεωρίαν μετ' ἀποδείξεώς τε θαυμαστῆς τῶν ἐπιστημονικῶν ἀρχῶν ἐπιστήμην ἀκριβῶς παραδίδωσι, λόγον τε περὶ αὐτῶν οἶδε ποιεῖσθαι, καὶ ἀκραιφνῆ καὶ γνήσια τὰ θεωρήματα παραδίδωσι, μηδὲν ἐπιθολούμενα ὑπ' ἀλλοτρίων δοξασμάτων.

ἔτι τε ποικίλος ἐστὶ καὶ πολύχους τεταγμένος τε καὶ διηρθρωμένος ἐν τῇ τῶν ἀριθμῶν εἰδήσει, τό τε καθολικὸν τῆς γνώσεως καὶ τὸ εὑρετικὸν πάρεστιν αὐτῷ πάμπολυ· τὴν γὰρ πρώτην σύστασιν καὶ τὴν πρώτην γένεσιν τῶν ἀριθμῶν θηρεύει.

ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπαράλειπτον· κοινῶς γὰρ ἐπὶ πάντα ἦλθε τὰ γένη καὶ τὰ εἴδη τῶν ἀριθμῶν, ἐν πεπερασμένοις τε **[5]** ἄπειρα περιέλαβε καὶ ἐν τεταγμένοις τὰ ἄτακτα, πρόεισί τε διὰ γενῶν καὶ εἰδῶν τεταγμένως οὐχ ὑπερβαίνων τὸ ἐφεξῆς, τά τε ἐν πολλοῖς φερόμενα θεωρήμασιν ἀτελῶς ἐν ἑνὶ περιλαμβάνει τελείῳ.

ἔχει δὲ ἐνταῦθα καὶ ὃ ἐν τοῖς ἄλλοις βιβλίοις ἥκιστα ἄν τις ἴδοι ἐν αὐτῷ ὑπάρχον τὸ σύντομον καὶ ἀκριβές, καὶ μετὰ τούτων τὸ πλῆρες καὶ τέλειον, ἀγκύλον τε καὶ συνεστραμμένον καὶ πολύνουν καὶ γόνιμον, ὡς μὲν ἐγὼ νομίζω, διότι αὐτὰ τὰ Πυθαγόρεια μαθήματα περὶ ἀριθμοῦ καθαρὰ τίθησιν, ἐξέστω δὲ καὶ τῷ βουλομένῳ περὶ τούτου εἰκάζειν ὅπως βούλεται. ἀλλ' ὅπερ ἐκ πάντων τούτων δεῖ συλλογίσασθαι, ἐκεῖνό ἐστιν.

εἰ γὰρ διὰ πάντα ταῦτα προκρίνομεν τὸν ἄνδρα τοῦτον ὡς ἀριθμητικώτατον, εἰκότως δὴ διὰ τοῦτο καὶ τίθεμεν ὅλην αὐτοῦ τὴν ἀριθμητικὴν τέχνην, οὐχ ἡγούμενοι δεῖν οὔτε ἀτελῶς αὐτὴν ἐκφέρειν ἀκρωτηριάσαντας αὐτῆς τὰ προηγούμενα, οὔτε μεταγράφειν· περιττὸν γὰρ καὶ τοῦτο· οὔτε σφετερίζεσθαι τὰ γεγραμμένα· ἀγνωμοσύνης γὰρ ἐσχάτης ἔργον ἀφαιρεῖσθαι τῆς ἐπιβαλλούσης δόξης τὸν συγγεγραφότα.

Wir finden nun, dass Nikomachos alles über die Arithmetik im Sinne des Pythagoras in seinem Werk "Arithmetische Kunst" dargelegt hat. Der Mann ist nämlich ausgezeichnet in den mathematischen Wissenschaften und wurde in diese von den Erfahrensten in den mathematischen Wissenschaften eingeführt; doch auch davon abgesehen lehrt er eine staunenswerte Ordnung und Theorie und vermittelt auch sorgfältig die Wissenschaft der wissenschaftlichen Prinzipien in bewundernswerter Darstellung. Er weiß auch Rechenschaft darüber abzulegen und lehrt die Lehrsätze rein und echt und nicht durch sachfremde Mutmaßungen verunreinigt.

Zudem ist er bei seiner Erforschung der Zahlen gewandt, gedankenreich, dazu ordnungsliebend und fähig, gut zu gliedern; auch besitzt er reichen Sinn für das Allgemeine der Erkenntnis und ist ein guter Forscher, ist er doch auf der Suche nach der Grundstruktur und ersten Entstehung der Zahlen.

Doch besitzt er auch Sinn für Vollständigkeit, denn er kam insgesamt auf alle Gattungen und Arten der Zahlen zu sprechen, umfasste im Begrenzten **[5]** das Unendliche und im Geordneten das Ungeordnete. So schreitet er in klarer Ordnung durch Gattungen und Arten voran, überspringt keine Folge und umfasst das unvollkommen in vielen Theoremen Mitgeführte vollkommen in einem einzigen Punkt.

Er besitzt aber in diesem Werk auch etwas, was man in seinen übrigen Büchern nur in sehr geringem Maß als seine Fähigkeit feststellen kann, die Knappheit und Sorgfalt <der Darstellung>, dazu auch Fülle und Vollkommenheit, Sauberkeit, komprimierte Kürze, Einfallsreichtum und Originalität, wie ich jedenfalls meine, weshalb er gerade die pythagoreischen mathematischen Wissenschaften über die Zahl rein darstellt; doch mag darüber jeder denken wie er will. Was man aber aus all diesem folgern muss, ist dieses <Lob>.

Wenn wir nämlich diesen Mann wegen aller dieser Vorzüge als den besten Arithmetiker vorziehen, stellen wir natürlich deshalb auch seine ganze arithmetische Kunst vor, ohne etwa zu meinen, wir müssten sie in unvollkommenem Zustand vorführen und seine Voraussetzungen verstümmeln oder sein Werk umschreiben (denn auch dies wäre überflüssig) oder uns gar sein Schrifttum aneignen (wäre es doch äußerster Unverstand, einem Schriftsteller den ihm zustehenden Ruhm zu rauben).

ἀλλ' οὐδὲ διὰ τοῦτο δεῖ ἀλλοτρίους τῶν Πυθαγορικῶν διατριβῶν λόγους ποιεῖσθαι· οὐδὲ γὰρ καινὰ λέγειν ἡμῖν πρόκειται, ἀλλὰ τὰ δοκοῦντα τοῖς παλαιοῖς ἀνδράσιν, ὅθεν οὐδὲν οὔτε ἀφελόντες οὔτε προσθέντες αὐτὴν τὴν Νικομάχειον τέχνην ἤδη παρατιθέμεθα ἐν τοῖς λόγοις.

Ἵνα δὲ μὴ ἀτελὴς γένηται μηδὲ κατὰ τοῦτο ἡ παροῦσα πραγματεία, φιλοσοφίαν Πυθαγόρας ὠνόμασε πρῶτος καὶ ὄρεξιν αὐτὴν εἶπεν εἶναι καὶ οἱονεὶ φιλίαν **[6]** σοφίας, σοφίαν δὲ ἐπιστήμην τῆς ἐν τοῖς οὖσιν ἀληθείας.

ὄντα δὲ ᾔδει καὶ ἔλεγε τὰ ἄυλα καὶ ἀίδια καὶ μόνα δραστικά, ὅπερ ἐστὶ τὰ ἀσώματα, ὁμωνύμως δὲ λοιπὸν ὄντα, κατὰ μετοχὴν αὐτῶν οὕτως καλούμενα, σωματικὰ εἴδη καὶ ὑλικά, γεννητά τε καὶ φθαρτὰ καὶ ὄντως οὐδέποτε ὄντα.

τὴν δὲ σοφίαν ἐπιστήμην εἶναι τῶν κυρίως ὄντων, ἀλλ' οὐχὶ τῶν ὁμωνύμως, ἐπειδήπερ οὐδὲ ἐπιστητὰ ὑπάρχει τὰ σωματικὰ οὐδὲ ἐπιδέχεται γνῶσιν βεβαίαν, ἄπειρά τε ὄντα καὶ ἐπιστήμῃ ἀπερίληπτα καὶ οἱονεὶ μὴ ὄντα κατὰ ἀντιδιαστολὴν τῶν καθόλου καὶ οὐδὲ ὅρῳ ὑποπεσεῖν εὐπεριγράφως δυνάμενα.

τῶν δὲ φύσει μὴ ἐπιστητῶν οὐδὲ ἐπιστήμην οἷόν τε ἐπινοῆσαι· οὐκ ἄρα ὄρεξιν τῆς μὴ ὑφεστώσης ἐπιστήμης εἰκὸς εἶναι, ἀλλὰ μᾶλλον τῆς περὶ τὰ κυρίως ὄντα καὶ ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡσαύτως ἔχοντα καὶ τῇ προσηγορίᾳ ἀεὶ συνυπάρχοντα.

καὶ γὰρ δὴ τῇ τούτων καταλήψει συμβέβηκε καὶ τὴν τῶν ὁμωνύμως ὄντων παρομαρτεῖν, οὐδ' ἐπιτηδευθεῖσάν ποτε, οἷα δὴ τῇ <τοῦ> καθόλου ἐπιστήμῃ <ἡ> τοῦ κατὰ μέρος· ‘τοιγὰρ περὶ τῶν καθόλου’ φησὶν ᾿Αρχύτας ‘καλῶς διαγνόντες ἔμελλον καὶ περὶ τῶν κατὰ μέρος οἷα ἐντὶ καλῶς ὀψεῖσθαι.’[1]

διόπερ οὐδὲ μονογενῆ οὐδὲ ἁπλᾶ ὑπάρχει τὰ ὄντα, ποικίλα δὲ ἤδη καὶ πολυειδῆ θεωρεῖται, τά τε νοητὰ καὶ τὰ ἀσώματα, <ὧν τὰ> ὄντα ἡ κλῆσις, καὶ τὰ σωματικὰ καὶ ὑπ' **[7]** αἴσθησιν πεπτωκότα, ἃ δὴ κατὰ μετοχὴν κοινωνεῖ τοῦ ὄντως γενέσθαι. ἀκόλουθον ἂν εἴη περὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ὄντων τεχνολογεῖν οὑτωσί πως.

---

[1] DK B 1, Z. 331, 2-4

Doch brauchen wir deshalb weder Lehren vorzutragen, die den pythagoreischen Vorlesungen fremd sind, noch wollen wir ja neue Lehren vorstellen, sondern nur die Ansichten der Alten. So stellen wir nun in unserer Darstellung die authentische Kunst des Nikomachos vor, ohne etwas wegzulassen oder hinzuzufügen.

Damit aber die vorliegende Arbeit auch in dieser Hinsicht keine Lücke aufweist: Pythagoras gab als erster der Philosophie ihren Namen und nannte sie ein Streben nach Weisheit und sozusagen eine Freundschaft **[6]** mit ihr. Weisheit aber sei die Wissenschaft von der Wahrheit im Seienden.

Als Seiendes aber verstand und bezeichnete er das Immaterielle, Ewige und allein Wirkende, und dies ist das Körperlose. Nur durch Bezeichnungsgleichheit aber heißen weiterhin "seiend" (doch nur, weil sie am Seienden teilhaben) körperliche und materielle Erscheinungen, die entstehen und vergehen und in Wirklichkeit niemals wirklich Existenz besitzen.

Weisheit aber sei Wissenschaft vom wirklich (und nicht nur durch Bezeichnungsgleichheit) Seienden. Ist doch das Körperliche nicht Objekt des Wissens, lässt auch keine sichere Erkenntnis zu, weil es unbegrenzt, durch Wissenschaft nicht erfassbar und im Vergleich mit den Universalien sozusagen nicht seiend ist und nicht einmal unter eine klar umschreibende Definition fallen kann.

Was aber von Natur aus nicht wissbar ist, davon könne man auch keine Wissenschaft erstreben; folglich könne es kaum ein Trachten nach einer Wissenschaft ohne Substanz geben, vielmehr nur nach Wissenschaft von dem im strengen Sinn Seienden, das sich immer gleich und im gleichen Zustand bleibt und der Bezeichnung "Seiend" stets wesenhaft entspricht.

Dem Begreifen des wahrhaft Seienden folgt ja nämlich notwendig auch das Erfassen des nur durch Namensgleichheit Seienden, auch ohne eigenes Streben danach, so wie der Wissenschaft vom Allgemeinen die des Besonderen. "Da sie das Allgemeine", sagt Archytas, "klar durchschaut hatten, mußten sie auch über das Wesen der Einzeldinge richtig urteilen".

Daher sind die seienden Dinge weder einzigartig noch einfach, sondern zeigen sich der Erkenntnis bereits als vielfältig und vielgestaltig. Dies gilt von den intelligiblen und immateriellen Dingen, die man "die seienden Dinge" nennt, wie auch von den körperlichen und **[7]** sinnlich wahrnehmbaren, die ja entsprechend ihrer Teilhabe Anteil am wahren Sein besitzen.

ἡ τοῦ συνεχοῦς καὶ ἡ τοῦ διῃρημένου φύσις πᾶσα τοῖς οὖσιν, ὅπερ ἐστὶ τῇ τοῦ παντὸς κόσμου συστάσει, διττῶς συνεπινοεῖται· τοῦ μὲν διῃρημένου κατὰ παράθεσίν τε καὶ σωρείαν, τοῦ δὲ συνεχοῦς κατὰ ἕνωσίν τε καὶ ἀλληλουχίαν. κυρίως δὲ τὸ μὲν συνεχὲς καὶ ἡνωμένον καλοῖτ' ἂν μέγεθος, τὸ δὲ παρακείμενον καὶ διῃρημένον πλῆθος.

καὶ κατὰ μὲν τὴν τοῦ μεγέθους οὐσίαν, εἷς τε ὁ κόσμος ἐπινοοῖτ' ἂν καὶ λέγοιτο στερεὸς καὶ σφαιρικός τε καὶ συμπεφυκὼς ἑαυτῷ διατεταμένος τε καὶ ἀλληλουχούμενος, κατὰ δὲ τὴν τοῦ πλήθους πάλιν ἰδέαν καὶ ἔννοιαν ἥ τε σύνταξις καὶ διακόσμησις καὶ ἁρμονία τοῦ παντὸς ἐπινοοῖτ' ἂν ἐκ τοσῶνδε φέρ' εἰπεῖν στοιχείων καὶ σφαιρῶν καὶ ἀστέρων γενῶν τε καὶ ζῴων καὶ φυτῶν ἐναντιοτήτων τε καὶ ὁμοιοτήτων τὴν σύστασιν ἔχουσα.

ἀλλὰ τοῦ μὲν ἡνωμένου ἐπ' ἄπειρον μὲν ἐκ παντός ἐστιν ἡ τομή, ἡ δ' αὔξησις ἐπὶ ὡρισμένον· τοῦ δὲ πλήθους κατὰ ἀντιπεπόνθησιν ἐπ' ἄπειρον μὲν ἡ αὔξησις, ἔμπαλιν δὲ ἡ τομὴ ἐπὶ ὡρισμένον, φύσει δὴ κατ' ἐπίνοιαν ἀμφοτέρων ἀπείρων ὄντων, καὶ διὰ τοῦτο ἐπιστήμαις ἀπεριορίστων· ‘ἀρχὰν’ γὰρ ‘οὐδὲ τὸ γνωσούμενον ἐσσεῖται πάντων ἀπείρων ἐόντων’ κατὰ τὸν Φιλόλαον.[2]

ἀναγκαίου δὲ ὄντος ἐπιστήμης φύσιν ἐνορᾶσθαι τοῖς οὖσιν **[8]** οὕτως ὑπὸ θείας ἠκριβωμένοις προνοίας, ἀποτεμόμεναι ἑκατέρου καὶ περατώσασαί τινες ἐπιστῆμαι τὸ περιληφθὲν αὐταῖς, ἀπὸ μὲν τοῦ πλήθους ποσὸν ἐκάλεσαν, ὅπερ ἤδη γνώριμον, ἀπὸ δὲ τοῦ μεγέθους κατὰ τὰ αὐτὰ πηλίκον· καὶ τὰ ἀμφότερα αὐτῶν γένη ἐπιστήμαις ὑπήγαγον ταῖς ἑαυτῶν εἰδήσεσιν, ἀριθμητικῇ μὲν τὸ ποσόν, γεωμετρίᾳ δὲ τὸ πηλίκον.

ἀλλ' ἐπεὶ μὴ μονοειδῆ ταῦτα ἦν, ἔτι δὲ μερικωτέραν ὑποδιαίρεσιν ἑκάτερον αὐτῶν ἐπεδέχοντο· τοῦ μὲν γὰρ ποσοῦ τὸ μὲν ἦν καθ' ἑαυτὸ τῆς πρὸς ἄλλο πως ἀπηλλαγμένον σχέσεως, οἷον φέρ' εἰπεῖν ἄρτιον περιττόν, τέλειον ἐλλιπὲς[3] καὶ τὰ ὅμοια, τὸ δὲ πρὸς ἕτερόν πως ἔχον (ὃ δὴ πρός τι ποσὸν ἰδίως λέγεται), οἷον ἴσον ἄνισον, πολυπλάσιον ἐπιμόριον ἐπιμερὲς καὶ τὰ παραπλήσια·

[2] DK B 3
[3] vgl. 30,10

Im Anschluss daran ist es wohl passend, über alles einfach Seiende etwa folgende Regel der Kunst vorzutragen: Das ganze Wesen des Zusammenhängenden und des Getrennten im Seienden, wie es durch den Bau des ganzen Kosmos gegeben ist, wird zweifach aufgefasst, und zwar das Getrennte im Sinn von Zusammensetzung und Häufung, und das Zusammenhängende im Sinn von Einheit und Zusammenhalt.

Zutreffend aber ließe sich das Zusammenhängende und Einheitliche "Größe" nennen, das Nebeneinander liegende und Getrennte aber "Menge". Und nach der Wesenheit "Größe" betrachtet, kann der Kosmos als Einheit aufgefasst und als Festkörper, kugelförmig, in sich zusammenhängend, ausgedehnt und zusammenhaltend bezeichnet werden; nach der Vorstellung und Begriff "Menge" hinwieder betrachtend können wir sagen, dass die Zusammensetzung, Ordnung und Harmonie des Alls ihren Bau sozusagen aus einer Vielzahl von Elementen gewinnt, aus Kugeln, Sternen, Gattungen von Tieren und Pflanzen sowie aus Gegensätzen und Ähnlichkeiten.

Das Vereinigte nun aber ist durchgängig teilbar bis zum Unendlichen, seine Steigerung aber geht hin zum Begrenzten; bei der Mehrung jedoch schreitet, entgegengesetzt, die Steigerung zum Unendlichen vor, während die Teilung zum Begrenzten hin strebt. Freilich sind beide von Natur aus für das Denken unendlich und deshalb wissenschaftlich nicht definierbar; "anfangs nämlich wird es nicht einmal etwas zu erkennen geben", wie Philolaos sagt, "da alles unendlich ist."

Weil es jedoch zwingend notwendige Aufgabe der Wissenschaft ist, am Seienden, das von der göttlichen Vorsehung **[8]** so fein geordnet ist, seine Natur zu erkennen, trennten manche Zweige der Wissenschaft das von ihnen beiden Umgriffene ab, grenzten es ein und nannten es nach der Menge "das Viele" (dies jedenfalls ist der Erkenntnis bereits zugänglich) und in gleicher Weise nach der Größe "das Große". Auch unterstellten sie die beiden Gattungen, entsprechend deren Erkenntnisgebiet, je einer Wissenschaft, und zwar der Arithmetik das Viele, der Geometrie das Große.

Doch waren die beiden Bereiche nicht einheitlich, sondern jeder ließ sich noch weiter in Unterabteilungen zerlegen. Die eine Seite nämlich des Vielen war isoliert und ohne jedes Verhältnis zu etwas anderem; so zum Beispiel das Gerade, Ungerade, Vollkommene, Unvollkommene und alles ähnliche; der andere Aspekt bezog sich auf etwas Zweites (man nennt dies ja im eigentlichen Sinn die verhältnismäßige Vielheit), so etwa das Gleiche, Ungleiche, Vielfache, Überteilige, Überteilende und alles ähnliche.

καὶ πάλιν τοῦ πηλίκου τὸ μὲν ὑπάρχει τε καὶ ἐπινοεῖται μένον, τὸ δὲ κινούμενον καὶ φερόμενον· διὰ τοῦτ' εἰκότως ταῖς προσαχθείσαις δυσὶν ἐπιστήμαις ἕτεραί τινες δύο συνεπέσχον καὶ συνεφήψαντο τῆς καθ' ἑκάτερον ἐπιστητὸν θεωρίας.

τῇ μὲν γὰρ ἀριθμητικῇ, ἰδίως λαχούσῃ τὴν περὶ τοῦ καθ' ἑαυτὸ ποσοῦ σκέψιν, συμμετέσχεν ἡ μουσικὴ τῆς περὶ τὸ πρός τι ποσὸν τεχνολογίας (οὐδὲν γὰρ ἄλλο τὸ ἁρμονικὸν αὐτῆς καὶ τὸ περὶ συμφωνιῶν ἐπαγγέλλεται, ὅτι μὴ σχέσεις καὶ λόγους διαρθροῦν τῶν φθόγγων πρὸς ἀλλήλους καὶ ποσότητα ὑπεροχῶν τε καὶ ἐλλείψεων), τῇ δὲ γεωμετρίᾳ περὶ τὴν τοῦ μένοντος καὶ ἑστῶτος πηλίκου ἐξέτασιν καταγιγνομένῃ συλλήπτρια ὑπῆρξεν ἡ σφαιρικὴ κινουμένου πηλίκου ἐπιγνώμων καταστᾶσα, τοῦ τελειοτάτου δηλονότι καὶ τεταγμένην καὶ ὁμαλὴν **[9]** κίνησιν ἐπιδεδεγμένου. διότι περὶ ἀδελφὰ τὰ ὑποκείμενα καταγενομένας, εὔλογον ἀδελφὰς καὶ τὰς ἐπιστήμας ταύτας νομίζειν, ἵνα μὴ ἀπαιδευτῇ τὸ ᾿Αρχύτειον ‘ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφά’.[4]

ἀλλήλων τε ἐχόμενα τρόπον ἁλύσεως κρίκων ἡγεῖσθαι, καὶ εἰς ἕνα σύνδεσμον καταλέγουσαν, ὥς φησιν ὁ θειότατος Πλάτων, καὶ μίαν ἀναφαίνεσθαι προσήκειν τούτων τῶν μαθημάτων τὴν συγγένειαν τῷ κατὰ τρόπον μανθάνοντι.[5]

τὸν δὲ σύμπαντα ταῦτα οὕτως εἰληφότα, ὡς αὐτὸς ὑποτίθεται, τοῦτον δὴ καλεῖ τὸν ἀληθέστατα σοφώτατον καὶ διισχυρίζεται παίζων, μεταδιωκτά τε καὶ ἐκ παντὸς αἱρετὰ ταῦτα τὰ μαθήματα, εἴτε χαλεπὰ εἴτε ῥᾴδια εἴη, παρεγγυᾷ τοῖς φιλοσοφεῖν προθύμουμένοις·

καὶ μάλα εὐλόγως, εἴπερ συνεχοῦς καὶ διῃρημένου καταλήψεις διὰ τούτων μόνων γίνονται, ἐκ δὲ συνεχοῦς καὶ διῃρημένου ὅ τε κόσμος καὶ τὰ ἐν αὐτῷ πάντα.

τοῦ δὴ ποσοῦ ἀκριβὴς κατάληψις σοφία, σοφίας δὲ ἔφεσις ἡ φιλοσοφία, φιλοσοφία δὲ ἐκ πασῶν μονωτάτη τεχνῶν τε καὶ ἐπιστητῶν τὸ οἰκεῖον καὶ κατὰ φύσιν ἀνθρώπῳ τέλος περιποιεῖ καὶ ἐπὶ τὴν εὐδαιμονίαν ἄγει τὴν παρὰ τὰ ἄλλα ζῷα τούτῳ μόνῳ προσήκουσαν καὶ κατὰ φύσιν σπουδαζομένην, ὡς σκοπιμώτατον αὐτῷ τέλος.

---

[4] DK B 1, Z. 331, 7 f
[5] Epinomis 992 A-B

Und wiederum gibt es und wird auch so aufgefasst bei dem Großen das Ruhende, andererseits das Bewegte und Fließende. Aus diesem Grund schlossen sich natürlich den beiden eingeführten Wissenschaften <Arithmetik, Geometrie> zwei weitere an und behandelten und bearbeiteten gemeinsam mit ihnen jeweils die Theorie des einen der beiden Erkenntnisobjekte <Musik, Astronomie>.

An der Arithmetik nämlich, die sich speziell der Erforschung des Vielen an sich widmet, nahm die Musik teil mit ihrer systematischen Bearbeitung des Vielen im Verhältnis zu etwas (nichts anderes nämlich will ihre Behandlung der Harmonie und des Zusammenklanges, als Lage und Verhältnisse der Töne zueinander und die Größe des Überschießenden und Fehlenden aufgliedernd darzustellen). Der Geometrie aber, die sich der Erforschung des ruhenden und bestehenden Großen widmet, gesellte sich als Helferin die Sphärik bei, die als Schiedsrichterin antrat über das bewegte Große, und zwar selbstverständlich über das vollkommenste Große, das eine geordnete und gleichmäßige **[9]** Bewegung angenommen hat. Daher ist es wohl begründet, auch diese Wissenschaften, die für verschwisterte Objekte entstanden, als verschwistert anzusehen, damit der Satz des Archytas nicht in den Wind gesprochen sei: "Diese Wissenschaften scheinen nämlich verschwistert zu sein".

Man muss auch annehmen, dass sie zusammenhängen wie die Glieder eines Armbandes und schließlich ein Band bilden, wie der allergöttlichste Platon sagt, und dass sich dem methodisch Lernenden zeigen muss, dass diese mathematischen Wissenschaften eine einzige Familie bilden.

Wer aber dies alles so erfasst, wie Platon voraussetzt, den nennt er den in vollster Wahrheit Weisesten, versichert es auch im Scherz und empfiehlt den eifrigen Jüngern der Philosophie, diese mathematischen Wissenschaften zu verfolgen und um jeden Preis zu erjagen, ob sie nun schwierig oder leicht sind. Und dies ist höchst sinnvoll, wenn sie allein das Zusammenhängende und Getrennte erfassen und andererseits der Kosmos und alles in ihm aus Zusammenhängendem und Getrenntem besteht.

Die gründliche Erfassung nun der Vielheit ist Weisheit, das Streben nach Weisheit aber ist Philosophie, und Philosophie als die "einzigste" aller Künste und wissenschaftlichen Gegenstände bringt den Menschen zu seiner ihm eigentümlichen und natürlichen Vollendung und führt ihn zum Glück, das ihm allein im Gegensatz zu allen übrigen Wesen angehört und das er gemäß seiner Natur als das ihm "angemessenste" Ziel erstrebt.

τῶν δέ γε τεσσάρων τούτων ἐπιστημῶν προηγεῖσθαι φαίνεται ἡ **[10]** ἀριθμητικὴ διὰ τὸ προτέρα καὶ ἀρχεγονωτέρα εὑρίσκεσθαι. συναναιρεῖ τε γὰρ ἑαυτῇ τὰς λοιπάς, καὶ πάλιν ἐκείναις συνεπιφέρεται· τὰ δὲ συναναιροῦντα μὲν μὴ συναναιρούμενα δέ, ἢ ἄλλως συνεπιφερόμενα μὲν μὴ συνεπιφέροντα δέ, πρότερά πως καὶ πρεσβύτερα δείκνυνται. διόπερ εὐλογωτάτη ἂν εἴη καὶ καθήκουσα ἡ περὶ πρωτίστης τῆς ἀριθμητικῆς τεχνολογίας σκέψις.

Τὸ δὲ ποσόν, ὅπερ ἐστὶ τὸν ἀριθμόν, Θαλῆς μὲν μονάδων σύστημα ὡρίσατο (κατὰ τὸ Αἰγυπτιακὸν ἀρέσκον, ὅπου περ καὶ ἐφιλομάθησε)· τὸ δὲ ἀριθμητικὸν ἓν ἰδίων οὐχ ὑποπεσεῖται οὖν οὔτε μονὰς οὔτε τὸ ἓν τοῖς ὅροις.

Πυθαγόρας δὲ ἔκτασιν καὶ ἐνέργειαν τῶν ἐν μονάδι σπερματικῶν λόγων, ἢ ἑτέρως τὸ πρὸ πάντων ὑποστὰν ἐν θείῳ νῷ ἀφ' οὗ καὶ ἐξ οὗ πάντα συντέτακται καὶ μένει τάξιν ἄλυτον διηριθμημένα. ἕτεροι δὲ τῶν ἀπ' αὐτοῦ προποδισμὸν ἀπὸ μονάδος μεγέθει αὐτῆς. Εὔδοξος δὲ ὁ Πυθαγόρειος ‘ἀριθμός ἐστιν’ εἶπε ‘πλῆθος ὡρισμένον’ διαστείλας εἶδος καὶ γένος, ὡς ἐν τοῖς ἀνωτέροις τὸ ποσὸν διεκρίθη.

οἱ δὲ περὶ Ἵππασον ἀκουσματικοὶ ἀριθμὸν εἶπον παράδειγμα πρῶτον κοσμοποιίας, καὶ πάλιν κριτικὸν κοσμουργοῦ θεοῦ ὄργανον. Φιλόλαος δέ φησιν ἀριθμὸν εἶναι τῆς τῶν κοσμικῶν αἰωνίας διαμονῆς τὴν κρατιστεύουσαν καὶ αὐτογενῆ συνοχήν.[6]

[11] Μονὰς δέ ἐστι ποσοῦ τὸ ἐλάχιστον ἢ ποσοῦ τὸ πρῶτον καὶ κοινὸν μέρος ἢ ἀρχὴ ποσοῦ· ὡς δὲ Θυμαρίδας περαίνουσα ποσότης, ἐπεὶ ἑκάστου καὶ ἀρχὴ καὶ τέλος πέρας καλεῖται, ἔστι δὲ ὧν καὶ τὸ μέσον, ὥσπερ ἀμέλει κύκλου καὶ σφαίρας.

οἱ δὲ νεώτεροι[7] καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται· ἔλειπε δὲ τῷ ὅρῳ τούτῳ τὸ κἂν συστηματικὸν ᾖ. συγκεχυμένως δὲ οἱ Χρυσίππειοι λέγοντες ‘μονάς ἐστι πλῆθος ἕν’· μόνη γὰρ αὕτη ἀντιδιέσταλται τῷ πλήθει.

---

[6] DK B 23
[7] z.B. Euklid, Elemente 7, Def. 1

Von diesen vier Wissenschaften aber besitzt **[10]** die Arithmetik wohl den Vorrang, weil sie als erste und ursprünglichste gefunden wurde. Sie hebt nämlich die übrigen mit sich selbst auf und wird wiederum mit jenen mitgeführt. Was aber aufhebt, jedoch nicht aufgehoben wird oder, anders, mitgeführt wird, aber selbst nicht mitführt, erweist sich überhaupt als vorangehend und ranghöher. Aus diesem Grund ist die Untersuchung zur systematischen Behandlung der Arithmetik, der allerersten Wissenschaft, sehr wohl begründet und sinnvoll.

1. Über absolute Quantität, das heißt Theorie der natürlichen Zahlen

Das Viele aber, das heißt die Zahl, definierte Thales als "Zusammenstellung von Einheiten" (nach der ägyptischen Lehre, die er auch eifrig lernte); das eigentliche arithmetische Eine aber nun wird weder als "Einheit" noch als "das Eine" unter die Definitionen fallen.

Pythagoras aber <nannte das Viele> "Ausdehnung und Wirkung der schöpferischen Gestaltungsprinzipien in der Einheit" oder, anders, "das, was vor allem im göttlichen Geist existierte, von dem und aus dem alles geordnet ist, und was in unauflöslicher, durch Zahlen bestimmter Ordnung bestehen bleibt". Andere Mitglieder seiner Schule aber sprachen vom "Voranschreiten von der Einheit aus durch ihre Größe". Der Pythagoreer Eudoxos aber sagte: "Eine Zahl ist eine definierte Menge", indem er Art und Gattung sonderte, so wie oben das Viele unterschieden wurde.

Die Akusmatiker um Hippasos jedoch sagten, eine Zahl sei "das erste Grundmuster der Weltenschöpfung" und wieder "das unterscheidende Werkzeug des göttlichen Weltenschöpfers". Philolaos aber behauptet, "eine Zahl sei die "herrscherlichste" und selbsterschaffene Klammer der ewigen Dauer der kosmischen Dinge". **[11]**

Eine Einheit aber ist der kleinste Teil eines Vielen oder der erste allgemeine Teil eines Vielen oder der Anfang eines Vielen oder, wie Thymaridas sagt, " eine begrenzende Quantität", weil man Anfang und Ende eines jeden Dinges Grenze nennt (bei manchem freilich auch die Mitte, wie natürlich bei Kreis und Kugel).

Die Neueren aber sprechen von Einheit, "gemäß der jedes Seiende als eines bezeichnet wird", doch fehlt bei dieser Definition der Zusatz "und sofern es zusammengesetzt ist". Sehr unklar drücken sich die Schüler des Chrysippos aus, indem sie sagen: "Eine Einheit ist eine einzige Menge", denn gerade die Einheit als solche ist der Menge klar entgegengesetzt.

τινὲς δὲ τῶν Πυθαγορείων ‘μονάς ἐστιν’ εἶπον ‘ἀριθμοῦ καὶ μορίων μεθόριον’· ἀπ' αὐτῆς γάρ, ὡς ἀπὸ σπέρματος καὶ ἀιδίου ῥίζης, ἐφ' ἑκάτερον ἀντιπεπονθότως αὔξονται οἱ λόγοι, τῶν μὲν ἐπ' ἄπειρον τεμνομένων μειούμενοι μεγαλωνυμώτερον ἀεί, τῶν δὲ ἐπ' ἄπειρον αὐξομένων ἔμπαλιν μεγεθυνόμενοι.

τινὲς δὲ ὡρίσαντο μονάδα εἰδῶν εἶδος, ὡς δυνάμει πάντας περιέχουσαν τοὺς ἐν ἀριθμῷ λόγους. καὶ γὰρ πολύγωνος ἐν ἐπιπέδῳ ἀπὸ τριγώνου μέχρι ἀπείρου, καὶ στερεὰ πᾶσιν εἴδεσιν ἐπιφαινομένη, καὶ σφαιρικὴ καὶ κωνική, ἀποκαταστική τε καὶ πλευρικὴ καὶ διαμετρικὴ καὶ τὸ κοινότατον ἑτερομήκης, ὅταν ἀφ' ἑαυτῆς γενομένης μείζονος ἔννοια δυνάμει παράσχῃ,[8] καὶ ἀναλογικὴ καὶ σχετικὴ κατὰ τὰς δέκα σχέσεις, καὶ ποικίλως ἄλλως, ὁσαχῶς ὑποδειχθήσεται.. μονὰς δὲ ἀπὸ τοῦ τῷ αὐτῆς τε λόγῳ δι' ὅλου ἐπιμένειν. καὶ τἄλλα δὲ ὅσα ἂν ὑπ' αὐτῆς οὕτω λογωθῇ.

[12] Πάλιν δὲ ἐξ ἄλλης ἀρχῆς τοῦ ποσοῦ κατὰ πρώτην <τομὴν> τὸ μέν ἐστιν ἄρτιον, τὸ δὲ περισσόν. ἄρτιον μὲν τὸ μερῶν ἴσων ἀφ' ἑαυτοῦ παρεκτικόν, μεγίστων τε καὶ ἐλαχίστων· μεγίστων μὲν πηλικότητι καὶ τῇ πρὸς τὸ ὅλον σχέσει, ὅτι εἰς ἡμίση, ἐλαχίστων δὲ ποσότητι, ὅτι εἰς δύο (τῶν γὰρ δύο ἐλάττονα φύσει οὐκ ἔστιν, εἴπερ οὐδὲ τῆς δυάδος ἀριθμὸς ἐνδοτέρω· πρώτη γὰρ αὕτη μονάδων σύστημα, ὅσπερ γενικοῦ ὅρος ἀριθμοῦ)· περισσὸν δὲ τὸ πάντως, ὅταν εἰς τὰ ἐλάχιστα διαιρῆται, ἄνισα τὰ μέρη ἀλλήλοις παρέχον. οὐ γὰρ διχῇ εἰς ἴσα μεριστόν· ἀναιρετικὸν γὰρ ἔσται τοῦτο τῆς φύσει ἀτόμου μονάδος εἰς τὴν σύμπασαν τεχνολογίαν καὶ φυσιολογίας τοιαύτας χρησιμευούσης.

[8] vgl. Nikomachos, Arithmetica Introductio 108,8

Einige Pythagoreer meinten aber: "Eine Einheit ist die Grenze zwischen <ganzer> Zahl und Brüchen". Von ihr aus nämlich, wie von einem Samenkorn und einer immerwährenden Wurzel, steigern sich die Proportionen im Gegensinn nach beiden Richtungen, wobei sich die Brüche ins Unendliche teilen und, kleiner werdend, immer größere Nenner erhalten, während umgekehrt die ganzen Zahlen ins Unendliche wachsen und immer größer werden.

Manche aber definierten die Einheit als "Gestalt der Gestalten", da sie potentiell alle Zahlenverhältnisse umfasse. Ist sie doch vieleckig in der Ebene (vom Dreieck bis zum unendlichen Vieleck), erscheint räumlich bei allen Raumfiguren, ist kugelförmig und kegelförmig, wiederkehrend, seitlich <Zahl der Einheiten der Seite eines Quadrates>, diagonal <die Zähler der aufeinanderfolgenden Brüche zur Wurzel aus 2 hin, ausgedrückt als fortgesetzter Bruch> und – im "allgemeinsten" - rechteckig, wenn es der Begriff einer von ihr gebildeten größeren Zahl im Wert zulässt <wenn sie eine Seite hat, die um eins größer ist als sie selbst>; sie beruht auch auf mathematischen Verhältnissen und ist relativ gemäß den zehn Formen der Proportion und in vielfältiger sonstiger Art, deren viele Arten wir darlegen werden. "Einheit" <Mon-as> kommt aber davon, dass sie ihren eigenen Begriff <nämlich "1"> grundsätzlich ein-hält <men-ein>. Dazu kommt auch alles Übrige, was durch sie in dieser Weise berechnet wird. **[12]**

Gerade-ungerade Zahlen

Geht man aber wiederum von einem anderen Prinzip aus, ist gemäß der ersten Einteilung der eine Teil der Vielheit gerade, der andere ungerade. Das Gerade ist es, was von sich aus gleiche Teile hervorbringt, und zwar die größten wie die kleinsten; die größten durch Quantität und die Relation zum Ganzen (weil nur halbiert wird), die kleinsten Teile, was die Menge betrifft, da ja nur bis zwei herab geteilt wird (gibt es doch auch von Natur aus keine kleinere Vielheit als zwei, jedenfalls wenn es unterhalb der Zweiheit keine weitere Zahl mehr gibt; ist sie doch die erste Zusammenstellung von Einheiten, und so lautet ja die allgemeine Definition einer Zahl).

Ungerade aber ist, was grundsätzlich, wenn man es in seine kleinsten Teile zerlegt, einander ungleiche Teile hervorbringt. Man kann es ja nicht durch Zweiteilung in gleiche Teile zerlegen, denn die naturgegebene unteilbare Einheit wird nicht aufhebbar sein, die für die gesamte systematische Behandlung <der Mathematik> und alle anderen naturwissenschaftlichen Untersuchungen dieser Art dienlich ist.

ἐπεὶ δὲ ὁ μὲν ἄρτιος διαιρούμενος ὁπωσοῦν ἢ ἴσα ἢ καὶ ἄνισα, εἰς ὁμογενῆ πάντως λύεται· ἢ γὰρ ἄρτια ἢ περιττὰ ἀμφότερα· ὁ δὲ περισσός, εἰς ἄλλα ἀμφότερα τὰ τοῦ ἀριθμοῦ μήκη· ἑτερομήκη μὲν ἐκ τοῦ κατασυμβεβηκότος κατὰ τὸ σημαινόμενον τὸν ἄρτιον ἐπωνόμαζον οἱ ἀπὸ τοῦ διδασκαλείου, ὡς τὸ ἕτερον μόνον τῶν τοῦ ἀριθμοῦ μηκῶν ἐν τοῖς μερισμοῖς ἔχοντα·

ἀντιδιεσταλμένως δὲ τούτῳ ἀμφιμήκη τὸν περισσὸν τὸν ἀμφότερα ὁμοῦ παρεχόμενον ταῦτα. καὶ δι' ἀλλήλων δ' ἂν γνωρισθείησαν ἐν τῇ φυσικῇ τοῦ ἀριθμοῦ ἐκθέσει, ἄρτιος μὲν ὁ μονάδι ἐφ' ἑκάτερον διαφέρων περισσοῦ, περισσὸς δὲ ὁ τῷ αὐτῷ ἀρτίου. εἰδοποιεῖται δὲ καθ' ἑκάτερον γένος ἰδίως τε καὶ συμ**[13]**βεβηκότως·

ἄρτιος μὲν δυάδι ἰδίως, συμβεβηκότως δὲ καὶ μονάδι· ἐπέρχεται γὰρ αὐτὸν μονὰς μὲν αἰεὶ δυαδικῶς, εἴτε ἀμιγῶς εἴτε καὶ συνδιαφόρως εἴτε καὶ ἄκρατος εἴτε καὶ σὺν ᾡτινιοῦν ὁμογενεῖ· περισσὸς δὲ ἐκ τοῦ ἐναντίου, ἰδίως μὲν ὑπὸ μονάδος μετρεῖται ὅταν περισσακῶς, συμβεβηκότως δὲ ὑπὸ δυάδος, οὐ μὴν καθ' ἑαυτήν, ἀλλὰ σὺν τῇ μονάδι.

ἐξαίρετον μέντοι μονὰς μὲν παρὰ πάντας ἔχει περισσούς, ὡς ἂν εἰδοποιὸς αὐτῶν, τὸ μηδ' εἰς ἄνισα μερίζεσθαι· δυὰς δὲ παρ' ἀρτίους, τὸ μόνον εἰς ἴσα. διὸ τὴν μὲν <μονάδα> Ἄτροπόν τε καὶ Ἀπόλλωνα καὶ ἕτερα τοιαῦτα, τὴν δὲ δυάδα Ἶσίν τε καὶ Ἄρτεμιν κατὰ ἀνάλογον οἱ Πυθαγορικοὶ ἐπωνόμαζον.

ἐκ δὲ τοῦ ἄτομος φύσει ἡ μονὰς εἶναι, πέρας ἐφ' ἑκάτερον καὶ ὁρισμὸς ἡ αὐτὴ φανήσεται· πηλίκῳ μέν, ἵνα ἀπ' αὐτῆς ὡς ὅλου ἡ ἐπ' ἄπειρον τομὴ ἄρχηται, ποσῷ δέ, ἵνα κατὰ ταὐτὰ ἡ ἐπ' ἄπειρον αὔξησις ἀντιπαρεκτείνηται ὡς μονάδος·

Weil aber die gerade Zahl, wenn sie irgendwie (entweder in gleiche oder ungleiche Teile) zerlegt wird, grundsätzlich in gleichartige Zahlen (entweder beide jeweils gerade oder ungerade Zahlen), die ungerade Zahl aber jeweils in zwei unterschiedlich große Zahlen aufgeteilt wird, nannten die <pythagoreischen> Schulmänner die gerade Zahl aufgrund der Folge, die dieser Bezeichnung entsprechend eintrat, "ungleichseitig" (Rechteckzahl), weil sie ja nur die eine der beiden Zahlenlängen beim Aufteilen ergibt <entweder gerade oder ungerade>.

Dem entgegengesetzt nannten sie die ungerade Zahl "beidlängig", weil sie diese Arten <gerade und ungerade> zugleich <bei der Aufteilung> hervorbringt. Und sie werden wohl in der natürlichen Zahlenreihe gegenseitig durch einander erkannt, die gerade Zahl, da sie sich nach jeder Seite um eins von der ungeraden unterscheidet, die ungerade aber ebenso von der geraden.

Beiden Gattungen entsprechend erfolgt aber die Festlegung der Art, sowohl ihrer Eigenart nach wie auch nach dem Zufälligen; **[13]** die gerade Zahl wird ihrer Eigenart nach durch die Zweiheit dargestellt, nach dem Zufälligen aber auch durch die Einheit (die Einheit nämlich tritt an sie immer in Form der Zweiheit heran, entweder unvermischt oder zusammen mit einer Differenz oder auch rein oder auch mit irgendetwas Verwandtem). Die ungerade Zahl aber wird im Gegensatz dazu ihrer Eigenart entsprechend durch die Einheit gemessen, wenn sie als Produkt einer Multiplikation mit einer ungeraden Zahl auftaucht, nach dem Zufälligen aber durch die Zweiheit, jedoch nicht nach deren eigenem Wesen <2>, sondern in Verbindung mit der Einheit.

Als besondere Eigenschaft aber besitzt die Einheit gegenüber allen anderen ungeraden Zahlen, als ihre Art festlegend, die Eigenschaft, auch nicht in ungleiche Teile zerlegt werden zu können; die Zweiheit ihrerseits zeichnet sich vor allen geraden Zahlen <artios> dadurch aus, dass sie nur in gleiche Teile <isa> zerlegt werden kann. Daher gaben die Pythagoreer <der Einheit> die Namen Atropos, Apollon und andere dieser Art und nannten dementsprechend die Zweiheit Isis <zu isa> und Artemis <zu artios>.

Dadurch aber, dass die Einheit von Natur aus unteilbar ist, stellt sie sich zugleich als Begrenzung und Definition nach beiden Seiten dar. Einmal der Größe nach, damit bei ihr als einem Ganzen die Zerlegung ins Unendliche beginnt, dann aber auch der Quantität nach, damit sich entsprechend die Vermehrung ins Unendliche von der Eins als Einheit aus in entgegengesetzte Richtung erstreckt.

καὶ ὡς ὅλου μὲν ἥμισυ εἶτα τρίτον εἶτα τέταρτον εἶτα πέμπτον καὶ ἑξῆς μείζονα αἰεὶ καὶ μᾶλλον μέρη ἐναντίως τῇ τῶν ὀνομάτων αὐξήσει προχωρούσῃ, γίνεται· ὡς δὲ ἀπὸ μονάδος δυὰς εἶτα τριὰς εἶτα τετρὰς καὶ ἐφεξῆς μέχρι παντὸς προκοπή, κατὰ τὰ ὀνόματα ἡ αὔξησις καὶ ἀντιπαρωνυμίας γένεσις ποικίλης παρὰ τοῦτο ὑποφύηται, τῆς μονάδος ὑφιστα**[14]**μένης ἀμφοτέροις, ἄρθρου τρόπον, πηλίκῳ τε καὶ ποσῷ, καὶ ὡσανεὶ διάφραγμα καὶ μεθόριον ποιούσης ἑαυτὴν τῆς ἀντιπαρωνυμίας τούτων.

ἐὰν γὰρ προχειρισώμεθα τὴν μονάδα, καὶ ὡς ἀπὸ γωνίας αὐτῆς λάβδωμά τι καταγράψωμεν, καὶ τὴν μὲν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τοῖς συνεχέσι μονάδι ἀριθμοῖς ἐφεξῆς συμπληρώσωμεν μέχρι βουλόμεθα, οἷον β′ γ′ δ′ ε′ ς′ ζ′ καὶ ἐφοσονοῦν, τὴν δὲ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῶν μερῶν ἀρξάμενοι, ὅπερ ἐστὶν ἡμίσους τοῦ προσεχεστάτου τῷ ὅλῳ κατὰ μέγεθος, συνεχέσι καὶ αὐτοῖς ἐφεξῆς γῳ δῳ εῳ ςῳ ζῳ καὶ ἐφοσονοῦν, τὴν εἰρημένην ἀντιπεπόνθησιν ὀψόμεθα καὶ φυσικὴν συνάρτησιν καὶ εὔτακτον σχέσιν, οἷον τοιαύτην.

ἐπεὶ εἰς δύο τὸ ὅλον ἐμερίσθη, ἥμισυ παρωνομάσθη καὶ συνεζύγη οὕτως τὸ ἥμισυ τῷ δύο· πάλιν ὅτι εἰς τρία τρίτον, καὶ εἰς τέσσαρα τέταρτον, καὶ ἐφεξῆς μέχρις ἑκατοστοῦ καὶ χιλιοστοῦ καὶ μυριοστοῦ, καὶ ἐντεῦθεν ἡ τῆς ἐπ' ἄπειρον τομῆς ἀνάγκη διὰ τὴν παρέκτασιν τοῦ ὁμολογουμένως ἐπ' ἄπειρον αὐξητοῦ παρεισβιάζεται.

καὶ ἔτι ὡς δὶς ἓν δύο, οὕτως ἡμισάκις ἓν ἥμισυ· καὶ ὡς δὶς δύο τέσσαρα, οὕτως ἡμισάκις ἥμισυ τέταρτον· καὶ ὡς δὶς δύο δίς, οὕτως ἡμισάκις ἥμισυ ἡμισάκις, ὀκτώ τε καὶ ὄγδοον· καὶ ὡς δὶς τρία ἕξ, οὕτως ἡμισάκις τρίτον ἕκτον.

καὶ καθάπαξ δὲ ὅ τι ἂν ἀφ' ἑκατέρου λάβωμεν, ἐν αὐτῷ ἐκείνῳ ὁ λόγος μένει, καὶ ἐφ' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν ὅσα ἂν ἁπλῶς συμβαίνῃ, ταῦτα ἐκ παντὸς καὶ ἐπὶ τῶν ἀντιστρόφων μερῶν εὑρεθήσεται ἀναλογίᾳ.

Und als von einem Ganzen entstehen nun als Teile zuerst die Hälfte, dann ein Drittel, Viertel, Fünftel und so weiter immer größere und mehr Teile, jedoch gerade im Gegensatz zur voranschreitenden Steigerung der Bezeichnungen <der Nenner>. Als von einer Einheit aber gehen von ihr aus Zweiheit, Dreiheit, dann Vierzahl und so fort der Reihe nach und schreiten bis zum All voran; und entsprechend den Bezeichnungen geschieht die Vermehrung und daneben die Entstehung vielfältiger entgegengesetzter Ausdrücke, wobei die Einheit **[14]** beiden Erscheinungen, der Größe und der Vielheit, wie ein Bindeglied zugrunde liegt und sich sozusagen zu einer Scheidewand und gemeinsamen Grenze der gegensätzlichen Namengebung von diesen macht.

Nehmen wir nämlich die Eins und beschreiben wir wie vom Scheitelpunkt eines Winkels von ihr aus eine Figur in Form eines Lambda und füllen wir den einen der Schenkel der Reihe nach mit den an die Eins sich anschließenden Zahlen beliebig weit fortschreitend, zum Beispiel 2, 3, 4, 5, 6, 7 und so weiter, und füllen wir andererseits den anderen Schenkel, beginnend mit dem größten der Brüche, der das seiner Größe nach dem Ganzen zu- nächstliegende Halbe ist, auch hier dann mit den hieran sich anschließenden Brüchen der Reihe nach: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ und so weiter, so wird sich unseren Blicken das erwähnte gegenseitige Verhältnis bieten, und wir werden einen natürlichen Zusammenhang und ein wohlgeordnetes Verhältnis sehen, und zwar in folgender Weise:

Als nämlich das Ganze in zwei Teile zerlegt wurde, erhielt es den Namen "einhalb", und so wurde das Halbe mit der Zwei verbunden; wiederum wurde bei der Dreiteilung das Drittel benannt, bei der Teilung in vier Teile das Viertel, und so ging es der Reihe nach weiter bis zum Hundertstel und Tausendstel und Zehntausendstel, und von hier aus ergibt sich zwangsläufig durch das Ansteigen des entsprechend ins Unendliche wachsenden Teilers die Teilung ins Unendliche.

Und weiter: Wie zweimal eins zwei gibt, so ergibt einhalb mal eins einhalb, und wie zweimal zwei vier macht, so ergibt einhalb mal einhalb ein Viertel; und wie zweimal zwei mal zwei acht ergibt, so macht einhalb mal einhalb mal einhalb ein Achtel; und wie zweimal drei sechs ergibt, so macht einhalb mal ein Drittel ein Sechstel.

Und ein für allemal: Was nur immer wir auf beiden Seiten nehmen, das Verhältnis bleibt stets genau das gleiche wie oben, und was bei jeder einzelnen ganzen Zahl einfach geschieht, dies wird sich grundsätzlich in Analogie dazu auch bei den gegenüberstehenden Brüchen finden.

προληπτέον δέ, ὡς χρήσιμον εἰς **[15]** τὰ ἑξῆς ἐσόμενον, τοῦτο· ὅτι παρωνυμούντων ἁπάντων μερῶν ἅπασιν ἀριθμοῖς, μόνον τὸ ἥμισυ τῷ δύο πράγματι μέν, οὐκέτι δὲ καὶ ὀνόματι παρωνυμεῖ· ἐπέλιπε γὰρ ἐν τῇ λέξει τοῦτο, ὥσπερ καὶ ἄλλα πολλά.

γένεσις δὲ περισσοῦ καὶ ἀπὸ μονάδος, καὶ κατὰ σύνθεσιν ἀδιάζευκτον οὐχὶ τὴν σωρηδὸν ἀλλὰ τὴν κατὰ συνδυασμόν, ἥν τινες συζυγικὴν καλοῦσιν, οἷον ἓν πρῶτον, εἶτα α′ β′, εἶτα πάλιν β′ γ′ καὶ γ′ δ′ πάλιν, ἐφεξῆς ὁμοίως·

ἀρτίου δέ, κατ' ἐμπλοκήν, ὡς α′ γ′, β′ δ′, γ′ ε′, δ′ ς′ καὶ ἐφοσονοῦν, ἵνα ὡς εἰδοποιὸς ἀρτίου καὶ στοιχεῖον ἡ δυάς, ἀλλ' οὐχ ὡς ἐνεργείᾳ ἄρτιος, παραλείπηται· ἢ ἑτέρως, ἑκάστου τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν διπλασιαζομένου, ὡς δὶς ἓν καὶ δὶς δύο καὶ ἐφεξῆς δὶς τρία, δὶς τέσσαρα, δι' οὗ τρανοῦται μᾶλλον ἡ προταχθεῖσα εἰδοποίησις ὑπὸ δυάδος τοῦ ἀρτίου.

καὶ ἐξ ἀλλήλων δ' ἂν γένοιτο οὕτως πρὸς ἔμφασιν τῆς τοῦ ἀριθμοῦ ἰδιότητος· τῶν γὰρ ἑκατέρωθεν ἑκάτερος ἑτερογενῶν ἅμα ἥμισυς.

καὶ τὸ θαυμασιώτατον, καὶ μονάδος ἴδιον καὶ συμβιβαστικὸν τοῦ μήπω ἀριθμὸν αὐτὴν εἶναι, ὅτι ἑτέρωθεν μόνον ἀλλ' οὐχὶ ἀμφοτέρωθεν περιεχομένη, μόνης τῆς δυάδος ἡμίσειά ἐστιν, ἀρκουμένη τῷ ἑνὶ γείτονι.

οὕτως δυνάμει πάντα ἐν αὐτῇ θεωρεῖται κοινῶς τά τε ἀρτίου καὶ περισσοῦ εἴδη ὡς πηγῇ τινι καὶ ἀμφοτέρων ἀδιακρίτῳ ῥίζῃ καὶ ἀναγκαίως ἀδιαιρέτῳ παρὰ τὰ ἄλλα πάντα. καὶ γὰρ τῶν βιαζομένων μονάδα διαιρεῖν καὶ παρατιθέντων αὐτῇ ἐκ θατέρου τὸ ἥμισυ ὡς ἓν ποσὸν καὶ ὁμογενὲς συνεχές, κωλυτικὸν γίνεται τὸ συζυγούντων ταῖς παρωνυμίαις τῶν ὑπὲρ αὐτὴν ἀριθμῶν ἁπάντων τοῖς καθ' **[16]** ἕκαστον ἀντιθέτοις μέρεσιν, αὐτὴν μόνῳ τῷ ὅλῳ ἀντιδιαστέλλεσθαι, καὶ τὸ σύγχυσιν ἔσεσθαι πάντως τῶν δύο γενικῶν τοῦ ἀριθμοῦ εἰδῶν εἰ καὶ τὸ περισσὸν φαίημεν τέμνεσθαι, Man muss aber, als nützlich für **[15]** das Anschließende, folgendes vorwegnehmen: Während alle Brüche mit allen <ganzen> Zahlen gleichnamig sind, ist einzig und allein die Hälfte mit der Zwei zwar der Sache, nicht aber mehr der Benennung nach gleichnamig; die Hälfte bildet nämlich bei der Bezeichnung (wie auch in vielem anderen) eine Ausnahme.

Das Ungerade aber entsteht auch seinerseits aus der Einheit, und zwar gemäß einer untrennbaren Zusammenstellung, nicht jedoch in arithmetischer Progression, sondern in Zweierkombination, die manche auch "Verbindung" <Zusammenjochung> nennen; also zum Beispiel zuerst eins <1>, dann 1, 2 <1 + 2 = 3>, dann wieder 2, 3 <2 + 3 = 5> und wiederum 3, 4 <3 + 4 = 7> und so immer weiter.

Die Entstehung des Geraden aber erfolgt durch Entflechtung; also zum Beispiel 1, 3 <1 + 3 = 4>; 2, 4 <2 + 4 = 6>; 3, 5 <3 + 5 = 8>; 4, 6 <4 + 6 = 10> und so immer weiter, damit als artstiftend und als Element für das Gerade die Zweiheit (aber nicht als aktuell gerade) übrig bleibt; oder anders, indem jede Zahl von der Eins an verdoppelt wird, zum Beispiel zweimal eins und zweimal zwei und weiter zweimal drei, zweimal vier, wodurch die vorgestellte Artstiftung des Geraden durch die Zweiheit noch deutlicher zum Ausdruck kommt.

Auch wechselseitig könnte es so geschehen zur Verdeutlichung der Eigenart der Zahl, ist doch jede Zahl zugleich die Hälfte der Summe beider gattungsmäßig verschiedener Zahlen auf jeder Seite <1 + 3 = 4; 2 ist die Hälfte von 4; 3 + 5 = 8; 4 ist die Hälfte von 8>.

Und, was das Wunderbarste ist, auch die Einheit <Eins> hat als Besonderheit und als Beweis dafür, dass sie noch keine Zahl ist, die Eigenschaft, dass sie nur auf einer der beiden Seiten, nicht aber auf beiden Seiten von ihr eine umgebende Zahl hat <nur die 2>, dass sie die Hälfte nur der Zwei ist und sich mit diesem einen Nachbarn begnügt.

So werden potentiell gemeinsam alle Arten des Geraden und Ungeraden in ihr betrachtet als einer Art von Quelle, nicht differenzierter und notwendigerweise ungeteilter Wurzel neben allen anderen Zahlen. Für diese nämlich, die gewaltsam die Einheit teilen und neben sie auf die andere Seite das Halbe hinstellen wollen als quantitative Einheit und homogenes Kontinuum, erhebt sich folgendes Hindernis: Während durch die Gleichnamigkeit alle Zahlen über der Eins mit den jeweiligen **[16]** Bruchzahlen ihnen gegenüber korrespondieren, würde hier die Einheit dem Ganzen allein getrennt gegenübergestellt. Auch entstünde eine völlige Vermengung der allgemeinen zwei Zahlenarten, wenn wir behaupteten, auch das Ungerade ließe sich teilen.

καὶ πάλιν τὸ οἷόν τ' εἶναι [παριστάνειν ἀναγκαῖον] μᾶλλον αὐτῇ ἡμίσους τὸ οὐδὲν ἐπὶ τὸ ἔλαττον παρατιθέναι, ὅπερ πολλαχοῦ ἀκόντων ἡμῶν φαίνεται ἐγκρῖνον ἑαυτὸ τῇ τῆς θεωρίας φύσει καὶ ἐνθάδε μὲν ἐν τῷ τῶν ἑκατέρωθεν ἅμα ἡμίσειαν εἶναι καὶ τὴν μονάδα δυάδος καὶ τοῦ οὐδέν, καθὰ καὶ οἱ λοιποὶ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατέρωθεν ἕκαστος ἅμα ἥμισυς ἐφαίνετο·

κἀκεῖ δὲ πολὺ μᾶλλον καὶ ἐναργέστερον ὅταν τοῦ θʹ τετραγώνου πρωτίστου μετὰ τῶν δυνάμει ὄντος περισσοῦ, ἐν τῇ μεσότητι, τουτέστι τῷ πέντε, ἀναφαίνηται ὁ τῆς δικαιοσύνης λόγος κατ' ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν συζύγως ἀμειβόμενος καὶ ὡς ἀφορίζονται οἱ Πυθαγορικοὶ δικαιοσύνην λέγοντες δύναμιν ἀποδόσεως τοῦ ἴσου καὶ προσήκοντος ἐμπεριεχομένην ἀριθμοῦ τετραγώνου περισσοῦ μεσότητι.

ἐκτεθέντων γὰρ στιχηδὸν τῶν ἀπὸ μονάδος μέχρις ἐννεάδος ἀριθμῶν, ὁ πέντε μέσος τοὺς μὲν ἐντὸς ἑαυτοῦ ἔλαττον ἢ προσῆκον ἔχοντας διορίσει, τοὺς δ' ὑπὲρ αὐτὸν πλεονεκτοῦντας καὶ κατὰ πρόβασίν γε· τοὺς γὰρ μᾶλλον τῇ ἐννεάδι ἐγγίζοντας ἀεί, τοὺς δὲ τῇ μονάδι ἀεὶ ἔλαττον· προσήκει τε ἑκάστῳ κατά γε τὸν τῆς ἰσότητος λόγον τὸ τοῦ πεντεκαιτεσσαράκοντα τῶν ὅλων συστήματος ἔννατον, ὅπερ αὐτόθεν τῇ μεσότητι τοῦ πλέον **[17]** καὶ ἔλαττον μόνῃ ἐμφαίνεται, ἐπεὶ καὶ ἡ δικαιοσύνη καὶ ἄλλαι ἀρεταὶ μεσότητες τούτων, ἀλλ' οὐχ ἕτερόν τι εὑρίσκονται οὖσαι.

διὰ τοῦτο ὅσῳ παρὰ τὸ καθῆκον ὑπερέχει ὁ θʹ καὶ πλεονεκτεῖ, τοσούτῳ λείπεται ὁ πρῶτος· ὅσῳ δὲ ὁ ηʹ, <τοσούτῳ> ὁ δεύτερος· καὶ ὅσῳ ὁ ζʹ, τοσούτῳ ὁ γʹ· καὶ ὅσῳ ὁ ςʹ, τοσούτῳ ὁ δʹ· τῇ γὰρ ἐπὶ τὸ μέσον βραχὺ ἐγγύτητι ὥσπερ ἐπὶ ἀορτὴν ζυγικοῦ πήχεος ἀπίσωσις ὑποφύεται, ὡς κἀκεῖ ὀρθότητος γωνιῶν, τῶν τε πρὸς τὸν πῆχυν τῶν πλαστίγγων καὶ τῶν τοῦ πήχεος πρὸς αὐτὸν τὸν ἀορτήν. ὁ δὲ μέσος ὁ εʹ τοσούτῳ λείπεται ὅσῳ πλεονάζει· οὐδενὶ ἄρα.

Und weiter bildet ein Hindernis der mögliche Nachweis der Notwendigkeit, dass man dem Einen eher als das Halbe das Nichts auf die Seite zum Geringeren hin danebenstellen kann, was sich uns vielfach gegen unseren Willen offenbar in den natürlichen Gang der Untersuchung einmischt, und dass hier im Verband der Zahlen auf beiden Seiten die Eins auch zugleich die Hälfte von zwei und nichts ist, wie entsprechend auch bei den übrigen Zahlen jede zugleich als die Hälfte der beiden Zahlen auf beiden Seiten von ihr erschien <z.B. $4 = (3 + 5) : 2$; $1 = (0 + 2) : 2$>.

Dort aber zeigt es sich noch viel klarer und deutlicher, wenn in der Mitte der 9, der ersten ungeraden Quadratzahl (neben der potentiell Ungeraden <1>), das heißt bei der Fünf, das Verhältnis der Gerechtigkeit aufscheint, das nach der arithmetischen Proportion korrespondierende Entsprechungen aufweist, und zwar so, wie die Pythagoreer definieren, indem sie die Gerechtigkeit als die Fähigkeit bezeichnen, das Gleiche und Zukommende zuzuteilen, die durch die Mitte einer ungeraden Quadratzahl <9> umfasst wird.

Stellt man nämlich die Zahlen von der Eins bis zur Neun der Reihe nach hin, wird die Fünf in der Mitte die diesseits von ihr Stehenden als solche abgrenzen, die weniger besitzen, als recht ist, und die jenseits von ihr Stehenden als solche, die zu viel haben, und zwar in steigernder Anordnung, nämlich die Mehrhabenden als die der Neun immer näher kommenden, und die der Eins Nahekommenden als solche, die immer weniger besitzen. Und jedem steht - jedenfalls nach dem Prinzip der Gleichheit - der neunte Teil der Gesamtsumme von fünfundvierzig <$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$> zu, der gerade hier allein durch den mittleren Punkt zwischen mehr **[17]** und weniger angezeigt ist <5 als mittlerer Punkt zwischen 1 und 9>, da man ja auch die Gerechtigkeit und andere Tugenden als deren Mittelmaß <zwischen Extremen> und als nichts anderes erkennt.

Aus diesem Grund fehlt der Eins ebensoviel, wie die 9 ungehörigerweise zuviel besitzt und voraus hat <nämlich 4>; ebenso steht es bei 4 im Verhältnis zur Zwei, und je mehr die 7 hat, umso weniger die 3, und je mehr die 6, desto weniger die 4. Denn durch den engen Anschluss zur Mitte wie hin zur Aufhängung eines Waagebalkens entsteht eine Art von Ausgleich, als ob auch dort rechte Winkel wären, und zwar die Winkel der Schalen zum Waagebalken und die des Waagebalkens zum Aufhängepunkt selbst. Die mittlere Zahl aber, die 5, hat ebenso viel zu wenig wie zuviel, also nichts <Unangemessenes>. Und dies ist allerdings ein deutlicher Hinweis, der hier aufs Nichts zielt, dass diese Betrachtung Nützliches in sich birgt, und ein zweiter wird sich sogleich zeigen.

καὶ μία μὲν ἔμφασις ἥδε τοῦ οὐδὲν ὅτι χρήσιμον ἐν τῇ θεωρίᾳ, καὶ ἄλλη δὲ εὐθὺς ἀναφαίνεται. οὐ γὰρ μόνον συνᾴδει τὸ καὶ τῷ σχήματι τοῦ χαρακτῆρος εἶναι τὸ ε′ τὸ ἥμισυ τοῦ θ′, ἀλλὰ καὶ ἔτι διὰ τὴν συγγένειαν ὁμοκατάληκτα φύσει εἶναι τὰ συζύγως ἑκατέρωθεν αὐτοῦ·

ἐνάκι γὰρ θ′ τῷ ἅπαξ α′, ὀκτάκι δὲ ὀκτὼ τῷ δὶς δύο, ἑπτάκι δὲ ἑπτὰ τῷ τρὶς γ′, ἑξάκι δὲ ἓξ τῷ τετράκι δ′, μόνον δὲ αὐτὸ ἑαυτῷ τὸ πεντάκις πέντε.

ἔτι τὸ μὲν ἐνάκι ε′ τῷ ἅπαξ ε′, τὸ δὲ ἐνάκι ς′ τῷ ἅπαξ δ′, τὸ δὲ ἐνάκι ζ′ τῷ ἅπαξ γ′, τὸ δὲ ἐνάκι ὀκτὼ τῷ ἅπαξ δύο. καὶ πάλιν τὸ ὀκτάκις ζ′ τῷ δὶς γ′ καὶ τὸ ὀκτάκις ς′ τῷ τρὶς δ′ <καὶ τὸ ὀκτάκις ε′ τῷ δὶς ε′> καὶ τὸ ἑπτάκις ς′ τῷ τρὶς δ′ <καὶ τὸ ἑπτάκις ε′ τῷ τρὶς ε′>. καὶ ἄλλως τὸ μὲν ἑξάκι ε′ τῷ τετράκι ε′, εἰ καὶ μὴ τῷ ὀνόματι ἀλλά γε τῇ δυνάμει, ὥσπερ καὶ **[18]** ἀπεδείξαμεν τὸ ἥμισυ τῷ δύο ἀντιπαρωνυμεῖν δυνάμει, ἀλλ' οὐκ ὀνόματι.

εἰ δὴ παρὰ τῶν πλεονεκτούντων τοῖς πλεονεκτουμένοις, ὥσπερ κριταὶ δίκαιοι καὶ τοῦ ἴσου καὶ ἐπιβάλλοντος ἀποδοτικοί, λαμβάνοντες ἀποδιδοῖμεν, οὐκ εἰκῇ παρὰ τοῦ τυχόντος λαβόντες τῷ τυχόντι ἀποδώσομεν, ἀλλὰ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, γνώμονι χρώμενοι καὶ οἷον κανόνι τῷ μήτε πλεονεκτήσαντι μήτε πλεονεκτηθέντι, τουτέστι τῇ πεντάδι· οὗτος γὰρ μόνος δικαίως τὸ ἑαυτοῦ πλῆρες ἔχει. ἀπὸ τοῦ οὖν ἐννέα τὸν ἀπ' αὐτοῦ πέμπτον λαβόντες τῷ α′ δώσομεν, καὶ ἰσωθήσονται ὁ πλεῖστον ἀδικήσας καὶ ὁ πλεῖστον ἀδικηθείς·

πέμπτον δὲ ἀπὸ τοῦ θ′ τὰ τέσσαρα· ἔστι γὰρ η′ ζ′ ς′ ε′ δ′. πάλιν ἀπὸ τοῦ η′ προσθήσομεν τῷ δύο ἀφελόντες γ′· ἀπὸ τοῦ η′ πέμπτον γὰρ τὰ γ′. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ′ ἀφελόντες τὸν ἀπ' αὐτοῦ πέμπτον τὰ β′, προσθήσομεν τῷ τρία, καὶ ἰσωθήσονται.

καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ς′ ἀφελόντες τὸν ἀπ' αὐτοῦ πέμπτον τὸ ἕν, προσθήσομεν τῷ δ′, καὶ ἔσονται ἴσοι. ἀπὸ δὲ τοῦ πέντε ἀφελόντες οὐδέν (τὸ ἀπ' αὐτοῦ πέμπτον γὰρ [α] τὸ οὐδέν), προσθήσομεν αὐτῷ, καὶ ἔσται ἑαυτῷ ἴσος.

Nicht nur nämlich ergibt es einen guten Einklang, dass die 5 die Hälfte von 9 bezeichnet, und zwar durch die Gestalt des Zahlzeichens <gr. Theta ist halbiert = E>, sondern auch noch durch die Verwandtschaftsbeziehung, die darin besteht, dass die korrespondierend auf beiden Seiten der Fünf stehenden Zahlen von Natur aus die gleiche Endzahl bewirken.

Endet doch neunmal 9 <81> mit einmal 1 <1>, achtmal acht aber mit zweimal zwei <64; 4 = 2 · 2>, siebenmal sieben aber mit dreimal 3 <49; 9 = 3 · 3>, sechsmal sechs mit viermal 4 <36 =20 + 16; 16 = 4 · 4>, und nur fünfmal fünf endet mit der eigenen Zahl <25; 5>.

Weiterhin endet neunmal 5 <45> mit der Zahl einmal 5, dagegen neunmal 6 <54> mit der Zahl einmal 4, neunmal 7 <63> mit einmal 3, und neunmal acht <72> geht auf einmal zwei aus. Und wiederum endet achtmal 7 <56> auf zweimal 3 <6 = 2 · 3>, achtmal 6 <48> auf zweimal 4 <4 = 2 · 4>, achtmal 5 <40> auf zweimal 5 <10 = 2 · 5>; siebenmal 6 <42> geht auf dreimal 4 aus <42 = 30 + 12; 12 = 3 · 4> <und siebenmal 5 <35> auf dreimal 5 <35 = 20 + 15; 15 = 3 · 5>. Und anders: Sechsmal 5 <30> endet gleich wie viermal 5 <20>, wenn auch nicht der Bezeichnung, so doch dem Zahlenwert nach, wie wir ja auch **[18]** darlegten, dass einhalb von der Zwei die Bezeichnung des Nenners hat, jedenfalls an Zahlenwert, wenn auch nicht der Benennung nach.

Wenn wir also nun wie gerechte Richter, die das Gleiche und Gebührende zuteilen, denen etwas wegnehmen, die zuviel besitzen, und es denen erstatten, die zu wenig erhalten haben, werden wir ja nicht blindlings irgendjemand etwas wegnehmen und es jemand beliebigem zusprechen, sondern im gleichen Verhältnis verfahren, indem wir als Winkelmaß (Gnomon) und sozusagen als Richtschnur das verwenden, was weder zuviel noch zu wenig besitzt, nämlich die Fünf; sie allein nämlich besitzt nach Recht und Gerechtigkeit ihr volles Vermögen. Von der Neun nun ausgehend nehmen wir die fünfte Zahl von ihr aus <die 4> und geben sie der Eins, und so wird ein voller Ausgleich geschaffen zwischen dem, der das größte Unrecht tat und dem, der das größte Unrecht erlitt.

An fünfter Stelle von der 9 an steht aber die Vier; die Reihe lautet ja 8, 7, 6, 5, 4. Wiederum werden wir von der 8 die 3 wegnehmen und der Zwei hinzufügen, ist doch die fünfte Zahl von der 8 her die 3. Und von der 7 nehmen wir die fünfte Zahl von ihr aus, die 2, weg und fügen sie der Drei hinzu, und damit ist der Ausgleich erzielt.

Und wieder nehmen wir von der 6 die fünfte Zahl von ihr aus, die Eins, weg und fügen sie der 4 hinzu, und sie werden gleich groß sein. Von der Fünf jedoch werden wir nichts wegnehmen (denn an fünfter Stelle von ihr aus steht das Nichts) und ihr hinzufügen, und so wird sie sich gleich bleiben.

οὕτως τὸ νοούμενον ἔλαττον, μονάδος ἀδιαιρέτου οὔσης, τὸ οὐδέν, πανταχοῦ σῴζει πρὸς τὴν μονάδα τὴν ἀναλογίαν, μᾶλλον ἢ ὅπερ ἐκεῖνοι ἐνόμιζον ἥμισυ, καὶ γέγονεν ἡ μονὰς καὶ αὐτὴ τῶν παρ' ἑκάτερα συντεθέντων ἡμίσεια· τοῦ γὰρ δύο καὶ τοῦ οὐδὲν ἥμισυ τὸ ἕν.

αὐτὸ μέντοι τὸ τοῦ οὐδὲν **[19]** ὄνομα ἐμφαντικώτατα ἡμῖν σημαίνει φύσει ἐλάχιστον εἶναι καὶ ἄτομον τὴν μονάδα· τὸ γὰρ οὐδὲν ἐν διαιρέσει στερίσκει πάσης οὐσίας, ὅπερ οὐκ ἂν ἐνοεῖτο εἰ τὸ ἥμισυ ὑπῆρχεν ἢ τρίτον ἢ τὰ ὅμοια αὐτῆς μέρη.

τί γὰρ δεῖ προσεπιπλέκειν ὅτι ἡ μονὰς πολυπλασιάσασα ἀριθμὸν ὁντινοῦν αὐτοῦ ἐκείνου οὐκ ἐκβαίνει, ὁπότε καὶ αὐτὴ τοῦτο ποιήσασα ἑαυτῇ οὐκ ἐξίσταται, ὡς ἂν μεθόριον τοῦ τε ἁπλῶς ἀριθμοῦ καὶ τοῦ οὐδὲν πεφυκυῖα; ὁ μὲν γὰρ εἴτε ἑαυτὸν εἴτε ἄλλον λάβοι ἐν οὐδετέρῳ τὸν λόγον ἵστησιν, ἀλλὰ πάντως τρίτον τινὰ ἀπογεννᾷ· τὸ δὲ οὐδὲν εἴτε ἑαυτὸ εἴτε ἄλλο δόξειε πολυπλασιάζειν αὐτὸ οὐδέποτε ἐκβήσεται· οὐδενάκι γὰρ οὐδέν, καὶ οὐδενάκι θʹ, οὐδέν· ἴσον γὰρ τῷ οὐδαμῶς θʹ· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως.

ἡ δὲ μονάς, ὡς ἀμφοῖν μέση, ἐὰν μὲν ἄλλον λάβῃ, ἐν ἐκείνῳ τὸν λόγον, ἐὰν δὲ ἑαυτήν, ἐν ἑαυτῇ ἀπολείπει.

καὶ ἔτι προσθετέον μετὰ τῶν προσεμφανισθέντων ὅτι ἀντιπεριίσταται προκοπὴ ὑποβάσει καὶ ὑπόβασις προκοπῇ. ἅπαξ γοῦν ἐννέα, ἐννέα· καὶ ὁ λόγος ἔμεινεν ἐν ταῖς ἀκροτάταις. καὶ δὶς θʹ, ιηʹ· καὶ μετέβη ὁ λόγος εἰς τὰς δευτέρας ἀκρότητας, καὶ τοῦτο ἐφεξῆς.

ἑτέρου γὰρ καιροῦ διερευνᾶν ἐπιπλέον πῶς καὶ τετραγωνισθέντος ἀπὸ τῆς στιχηδὸν ἐκθέσεως τοῦ ἀριθμοῦ οὐκ ἐλάττονα πιθανὰ ἐπισυμβαίνει φύσει καὶ οὐ νόμῳ, ὥς φησί που Φιλόλαος·[9]

τοῦ μὲν πέντε ὁμοίως καὶ ἐνταῦθα μεσότητος εὑρισκομένου κατὰ τοὺς τρεῖς ἄλλοτε ἄλλως στίχους, μόνον δὲ τῶν ἐφεπομένων αὐτοῦ κατά τε **[20]** μῆκος καὶ πλάτος καὶ ἔτι διαγωνίως ἀπειληφότων τὸ ἐπιβάλλον·

[9] DK B 9

So behält das gedachte Minus (denn die Eins ist unteilbar), das Nichts, durchgehend sein Verhältnis zur Eins (und zwar eher als das Halbe, wie jene <die Pythagoreer> dachten), und die Eins selbst wurde auch zur Hälfte der <Summe der> beidseitig von ihr stehenden Zahlen; ist doch die Eins die Hälfte von der Zwei und dem Nichts.

Gerade die Bezeichnung "Nichts" **[19]** aber zeigt uns auf das deutlichste, dass die Eins von Natur aus die kleinste und unteilbare Einheit ist. Das Nichts nämlich hebt bei der Teilung jegliches Sein auf, was nicht denkbar wäre, wenn es von ihm eine Hälfte, ein Drittel oder ähnliche Brüche gäbe.

Muss man noch hinzufügen, dass die Eins, wenn sie irgendeine Zahl multipliziert, jene Zahl nicht überschreitet, auch, mit sich selbst multipliziert, über den eigenen Zahlenwert nicht hinauskommt, da sie von Natur aus die Grenze zwischen der Zahl schlechthin und dem Nichts darstellt? Ob eine Zahl nämlich sich selbst oder eine andere Zahl malnimmt, sie stellt das Verhältnis in keiner der beiden Zahlen dar, sondern bringt grundsätzlich irgendeine dritte Zahl hervor; das Nichts jedoch, ob es scheinbar sich selbst oder etwas anderes multipliziert, wird nie mehr sein als nichts. Keinmal ist ja nichts, und keinmal 9 ist auch nichts, denn es ist ebensoviel wie überhaupt nicht 9; und so geht es auch bei allen anderen Zahlen.

Wenn die Eins aber, in der Mitte zwischen beiden <Zahlen und Nichts> stehend, eine andere Zahl malnimmt, lässt sie in jener ihre Relation bestehen, wenn sie aber sich selbst malnimmt, in sich selbst.

Auch ist zu dem bisher Dargelegten noch hinzuzufügen, dass das Fortschreiten <der Zahlen> entgegengesetzt zur fortgesetzten Verminderung verläuft und die fortgesetzte Verminderung entgegengesetzt zum Fortschreiten. Also ist einmal neun = neun, und das Verhältnis blieb in den Außenzahlen <1; 9>. Auch ist zweimal 9 = 18, und das Verhältnis ging auf die zweiten Außenzahlen über <2; 8>, und so geht es der Reihe nach weiter.

Es gehört nämlich zu einer anderen Gelegenheit, dies ausführlicher zu untersuchen, wie auch, wenn die Zahl in reihenweise Anordnung quadriert wird, nicht weniger Glaubwürdiges hinzukommt, "durch Natur und nicht durch Satzung", wie Philolaos irgendwo sagt.

Denn es findet sich die Fünf in gleicher Weise auch dabei entsprechend den drei Reihen einerseits so und dann wieder anders als Mitte, und daher haben allein die unmittelbar folgenden Zahlen in Länge, Breite und Diagonale das rechte Verhältnis **[20]**.

τῶν δὲ μὴ οὕτως ἐχόντων πλεονεκτούντων τε καὶ πλεονεκτουμένων· καὶ οὐχ ὡς ἔτυχεν, ἀλλ' ὡς κατά τινα ἀνάλογον ἀντιπεπόνθησιν. ἀλλὰ νῦν γε ἀναπέμψαντες τὸν περὶ τούτων πλήρη λόγον εἰς τὸν περὶ δικαιοσύνης ἴδιον, χωρῶμεν ἐπὶ τὰ ἑξῆς.

Τοῦ γὰρ ἀρτίου καθ' ὑποδιαίρεσιν τὸ μέν ἐστιν ἀρτιάκις ἄρτιον, τὸ δ' ἀντίζυγον τούτῳ ἀρτιοπέρισσον, ὡσανεὶ ἀκρότητες· μέσον δ' αὐτῶν καὶ οἷον κοινὸν ἀμφοτέρων περισσάρτιον.

ὅπερ ἀγνοοῦντες οἱ περὶ Εὐκλείδην συγκεχυμένως τὸν αὐτὸν οἴονται περισσάρτιόν τε καὶ ἀρτιοπέρισσον εἶναι, οὐδὲν ἀκριβὲς ἐν τῷ τόπῳ γλαφυρωτάτῳ περ ὄντι θεωρήσαντες, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται.

ἀρτιάκις ἄρτιος μὲν οὖν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ τὰ ἑαυτοῦ ἡμίση καὶ τὰ τῶν ἡμίσεων ἡμίση καὶ ἔτι τῶν ὑπ' ἐκεῖνα μέχρι μονάδος ἀεὶ ἄρτια ἔχων, ᾧ καὶ διὰ τοῦτο συμβέβηκε μόνῳ ὑπ' ἀρτίου μετρεῖσθαι μόνον ἀρτιάκις.

εἰ δέ τις πρὸς τούτῳ ἔτι καὶ περισσάκις μετρεῖται ὑπὸ ἀρτίου, ἐκφεύξεται τὸ λεγόμενον καὶ ἔσται θατέρου τῶν ἄλλων εἰδῶν. ὥστε καὶ ἐνθάδε ἡμαρτημένως πάλιν Εὐκλείδης ἀφορίζεται λέγων· 'ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος ἀρτιάκις·'[10]

ἰδοὺ γὰρ ὁ κδʹ ὑπὸ τοῦ ϛʹ ἀρτίου τετράκι μετρεῖται καὶ ὑπὸ τοῦ δʹ ἑξάκις, καὶ ἕτεροι ἄλλοι ὁμοίως, καὶ οὐκ εἰσὶν ἀρτιάκις ἄρτιοι **[21]** οὐδὲ κατ' αὐτόν, παρακολούθημα δ' αὐτοῦ τὸ τὴν εἰς δύο λύσιν αὐτόν τε ἴσχειν καὶ τὰ μέρη καὶ τῶν μερῶν τὰ μέρη, καὶ τοῦτο μέχρι τῆς φύσει ἀτόμου μονάδος.

ἔοικε δὲ διὰ τὸ μὴ μόνον ὑπ' ἀρτίου ἀρτιάκις μετρεῖσθαι τετευχέναι τοῦ ὀνόματος, ἀλλὰ καὶ ὅτι πᾶν ὃ ἂν ἐν αὐτῷ μέρος ληφθῇ ἀρτιακῶς ὀνομάζεται. καὶ πάλιν ἡ ἑκάστῳ μέρει ἐμπεριεχομένη δύναμις, τουτέστιν αἱ μονάδες, ἄρτιοι καὶ αὐταὶ ὁμοειδῶς εἰσι.

[10] Euklid, Elemente VII, Def. 8

Es stehen andererseits die Zahlen über und unter 5 in anderem Verhältnis, aber nicht zufällig, sondern nach einer gewissen reziproken Proportion <5 mal 5 = 25, die proportionale arithmetische Mitte zwischen 4 mal 5 und 6 mal 5 = 30>. Für jetzt jedoch vertagen wir die genaueren Ausführungen darüber auf die eigentliche Darlegung über die Gerechtigkeit und wollen zu dem kommen, was folgt.

Grademal gerade Zahlen

Von dem Geraden nämlich gibt es in weiterer Unterteilung einerseits das gerademal Gerade; mit ihm korrespondiert das gerademal Ungerade. Dieses sind gleichsam die Randpunkte; in ihrer Mitte aber und sozusagen Gemeingut beider ist das ungerademal Gerade.

Dies weiß die Schule des Eukleides nicht, und sie meinen, ganz verworren, ungerademal Gerade und gerademal Ungerade sei dieselbe Art von Zahl, indem sie sehr unexakt in einem Punkt untersuchten, der doch sonnenklar ist, wie im Folgenden bewiesen wird.

Gerademal gerade ist nun eine Zahl, deren eigene Hälften gerade sind, ebenso durchgehend die Hälften dieser Hälften und, wieder untergeteilt, deren Hälften bis herab zur Eins; diese Zahl hat deshalb auch die Eigenschaft, nur von einer geraden Zahl gerademal gemessen zu werden.

Sollte aber eine Zahl obendrein auch noch ungerademal von einer geraden Zahl gemessen werden, passt sie nicht mehr zu dem Gesagten und wird zu einer der anderen Arten gehören. Daher definiert Eukleides auch hier wiederum fehlerhaft, wenn er sagt: "Gerademal gerade ist die Zahl, die sich von einer geraden Zahl nach einer geraden Zahl messen läßt."

Man sehe nämlich: Die Zahl 24 wird von der geraden Zahl 6 viermal gemessen und von der 4 sechsmal und andere Zahlen dieser Art in gleicher Weise, und doch sind sie nicht gerademal gerade, **[21]** auch nicht einmal nach Eukleides; seine Konsequenz aber ist, dass sie nach zwei auflösbar ist, sie und ihre Teile und die Teile der Teile, und dies bis herab zur Eins, die von Natur aus unteilbar ist.

Das gerademal Gerade erhielt aber wohl seinen Namen, weil es nicht nur von einem Geraden gerademal gemessen wird, sondern auch, weil jedes Teil von ihm, das man nimmt, "mit einer geraden Zahl multipliziert" genannt wird. Und wiederum ist der von jedem Teil umfasste Zahlenwert <Divisor>, das heißt seine Einheiten, gerade und ebenfalls gleichartig <nämlich gerademal gerade>.

γένεσις δ' αὐτοῦ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον διπλάσιος λόγος ἐπ' ἄπειρον. ἀλλ' ἐὰν κατὰ περισσὴν ἔκθεσιν οἱ ἀρτιάκις ἄρτιοι ἀπὸ ῥίζης προχειρισθῶσιν εἰς μίαν μεσότητα, ἀντιπαρωνυμήσουσιν αἱ ἀκρότητες ἐν αὐτοῖς καὶ αἱ μετ' ἐκείνας καὶ αἱ συνεχῶς μέχρι τῶν παραμέσων, ὥστε καὶ τὸ ὑφ' ἑκάστης συζυγίας ἴσον ἀποτελεῖσθαι τῷ ἀπὸ τῆς μεσότητος, ἐπεὶ καὶ μόνη ἡ αὐτὴ παρωνύμως ἀνθυπήκουεν αὐτῇ.

ἐὰν δὲ κατὰ ἀρτίαν, ὁ λόγος εἰς δύο μεσότητας ἀντιπαρωνυμούσας ἀλλήλαις διχασθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν ἴσον ἀποτελεῖσθαι τῷ ὑπὸ τῶν παρ' ἑκάτερα εὐτάκτως ἀεὶ μέχρι τῶν ἄκρων.

διαφορὰν δὲ πάντως ἕξουσιν ἐν τῇ τῆς γενέσεως προκοπῇ οἱ μείζονες ἀεὶ πρὸς τοὺς ἐλάττονας αὐτοὺς τοὺς ἐλάττονας, ἵν' ἐκ τούτου καὶ αἱ διαφοραὶ καὶ αἱ τῶν διαφορῶν πάλιν διαφοραὶ καὶ τούτων μέχρι ἐπιδέχεται τὸν αὐτοῦ λόγον ἔχουσαι τριγώνου τρόπον σχηματίζονται.

κατὰ σύνθεσιν δ' αὐτῶν τὴν σωρηδὸν περισσογονία πάντως γίνεται χρησιμεύουσα ἡμῖν μετὰ βραχὺ εἰς τὴν τῶν τελείων γένεσιν. αἰεὶ γὰρ παρ' **[22]** αὐτῇ ὁ μέλλων παρὰ μονάδα προεμφαίνεται, πάντες δὲ οἱ μέλλοντες ἄρτιοι γενικῶς· τοιούτων γὰρ ἡ ἔκθεσις.

παρὰ δὲ μονάδα πᾶς ἄρτιος ἀναγκαίως περισσός. καὶ ἐπὶ πασῶν δὲ τῶν ἀνάλογον ἐκθέσεων βεβαιοῦται τὸ ἀδιαίρετον φύσει τὴν μονάδα μένειν· ἀντιπαρωνυμοῦσαν γὰρ ἑκάστοτε τῷ μεγίστῳ τὴν τοῦ ὅλου προσηγορίαν μόνη ὑφαίνει.

᾿Αρτιοπέρισσος δέ ἐστιν ὁ καὶ αὐτὸς μὲν εἰς δύο ἴσα κατὰ τὸ κοινὸν διαιρούμενος, οὐ μέντοι γε τὰ μέρη ἔτι διαιρετὰ ἔχων, ἀλλ' εὐθὺς ἑκάτερον περισσόν·

Die Entstehung aber des geradeмal Geraden geht so vor sich: Von der Einheit aus gleichmäßige Verdoppelung bis zum Unendlichen. Wenn aber in einer Reihe mit ungerade vielen Zahlen die gerademal geraden Zahlen von der Wurzel an <1> an um eine Mittelzahl angeordnet werden <z.B. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; dabei ist 8 die Mittelzahl>, dann ergeben die Außenzahlen davon bei verschiedenen Namen das gleiche Produkt wie die weiter innen stehenden Eckzahlen und die weiter folgenden bis hin zu den beiden links und rechts der Mittelzahl <also: 1 · 64 = 64; 2 · 32 = 64; 4 · 16 = 64>, so dass auch das Produkt jeder solchen Paarung dem Produkt der Mittelzahl mit sich selbst gleich ist <8 · 8 = 64>, da sich dieselbe allein mit abgeleitetem Namen entspricht.

Wenn man aber in einer Reihe mit gerade vielen Zahlen anordnet, wird sich die Anordnung in zwei Mittelzahlen spalten, die zwar voneinander verschiedene Namen haben, jedoch in schöner Ordnung das gleiche Produkt bilden wie die jeweils beiderseits neben ihnen stehenden weiteren Zahlen bis hinaus zu den Außenzahlen.

Durchgehend aber werden im Voranschreiten der Erzeugung die größeren Zahlen stets gegenüber den geringeren Zahlen als Unterschied gerade diese geringeren Zahlen haben, damit dadurch auch die Unterschiede und wiederum die Unterschiede der Unterschiede und von diesen die Unterschiede, die das gleiche Verhältnis haben, soweit dies möglich ist, die Form eines Dreiecks annehmen.

Bei ihrer Zusammenstellung aber in Haufen ergibt sich grundsätzlich eine Erzeugung ungerader Zahlen <1+2 = 3; 3+4 = 7; 7+8 = 15, usw.>, die uns gleich nachher zur Erzeugung der vollkommenen <Zahlen> nützlich sein wird. Stets nämlich **[22]** erscheint in dieser Reihe die künftig erzeugte Zahl um eine Eins kleiner, während alle Reihenzahlen generell gerade Zahlen sind; aus solchen nämlich besteht die Reihe.

Um eine Eins verkürzt aber ist jede gerade Zahl notwendigerweise ungerade. Und bei allen entsprechenden Reihen bestätigt sich, dass die Eins von Natur aus unzerlegbar bleibt; jedes Mal nämlich erzeugt sie allein die Bezeichnung des Ganzen gegenüberliegend zur größten Zahl.

Gerademal ungerade Zahlen

Geradungerade aber ist die Zahl, die zwar allgemein selbst in zwei gleiche- Teile geteilt wird, deren Teile jedoch dann nicht mehr teilbar, sondern sogleich beide ungerade sind;

ἔνθεν καὶ ὠνομάσθη, ὅτι ἄρτιος ὢν τὰ μέγιστα μέρη εὐθὺς περισσὰ ἔχει, ἢ μᾶλλον ὅτι τοῖς τῶν ἐν αὐτῷ μερῶν ὀνόμασιν αἱ αὐτῶν δυνάμεις ἀντιπαίουσιν, ἄρτιαι μὲν οὖσαι περισσωνυμούντων ἐκείνων, περισσαὶ δὲ ἀρτιωνυμούντων.

καὶ οὐ κατὰ τοῦτο μόνον ἀντικεῖσθαι τῷ πρώτῳ εἴδει τοῦ ἀρτίου ἐλέχθη, ἀλλὰ καὶ ὅτι τούτου μὲν τὸ μεῖζον ἄκρον μόνον ἅπαξ διαιρετὸν ἀόριστον ὂν καὶ ἄλλοτε ἄλλο, ἐκείνου δὲ τὸ ἔλαττον μόνον ἀδιαίρετον ὡρισμένον ὑπάρχον καὶ ταὐτὸν ἀεί.

γεννᾶται δὲ δυάδος τοὺς τάξει περισσοὺς μηκυνούσης, ἵν' ἐπειδὴ δυάδι οἱ γνώμονες ἀλλήλων διαφέρουσι δυὰς δὲ καὶ ἡ μηκύνουσα, τῶν ἀποτελουμένων ἡ παραλλαγὴ συνεχῶν τετρὰς ᾖ· δὶς γὰρ δύο τοῦτο.

κἂν μὲν ἀπὸ τοῦ δυνάμει περισσοῦ ἀρχώμεθα, ὁ δυνάμει ἀρτιοπέρισσος ἀποτελεῖται ὁ δύο, ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐνεργείᾳ τοῦ τρία, ὁ ἐνεργείᾳ ϛ′. ἔσονται δὴ ἐν τῇ φυσικῇ τοῦ ἀριθμοῦ ἐκθέσει οἱ τοιοῦτοι δυάδι μὲν εἰδοποιούμενοι, τρεῖς δὲ **[23]** παραλείποντες, τετράδι δὲ διαφέροντες, πέμπτοι δ' ἀπ' ἀλλήλων.

ὅτι δ' ἐφάνη τὸ συνεχές, ὅπερ ἐστὶ πηλίκον, ἀντιπάσχον τῷ διῃρημένῳ, τουτέστι ποσῷ, κέχρηται δὲ ἤδη τὸ πρότερον εἶδος τῇ τοῦ πηλίκου ἀναλογίᾳ δὲ χρήσεται καὶ τοῦτο τῇ τοῦ ποσοῦ ὡς ἂν καὶ τὸ ἀντικείμενον ἐκείνῳ, καὶ κατ' ἀριθμητικὴν μεσότητα αἱ ἀκρότητες συντεθειμέναι ἴσαι ταῖς μεσότησιν ἔσονται ἐν ἀρτίᾳ ἐκθέσει· ἐν δὲ περισσῇ, τῇ μεσότητι σὺν αὐτῇ, τουτέστι διπλαὶ αὐτῆς, ὥσπερ καὶ τὸ ἀπὸ τοῖς ὑπὸ γεωμετρικῶς ἐν ἀρτιάκις ἀρτίῳ συμβάντος τὸ τοὺς ἄκρους καὶ τοὺς ὑπ' ἐκείνους μέχρι μέσου ἀλλήλους πολυπλασιάζοντας ἴσους γίνεσθαι τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου πολυπλασιασθέντι, ἢ δυσὶ μέσοις καὶ αὐτοῖς μηκυνομένοις, καθὰ καὶ οἱ ἑκατέρωθεν αὐτῶν ἄκροι, ἐν ἀρτίᾳ δηλονότι ἐκθέσει.

daher kommt auch ihr Name, weil sie gerade ist, aber sogleich ihre beiden größten Teile ungerade sind, oder, besser, weil den Namen der in ihr aufgehobenen Teile <Divisoren> deren Werte <d.h. gerade oder ungerade> widersprechen, da die Werte gerade, die Bezeichnungen aber ungerade und die Werte ungerade, die Bezeichnungen aber gerade sind <z.B. 18; 18 : 2 (gerade) = 9 (ungerade); 18 : 3 (ungerade) = 6 (gerade)>.

Und nicht nur deshalb allein wurde gesagt, dass sie der ersten Art des Geraden entgegengesetzt ist, sondern auch deshalb, weil ihr größtes Glied nur einmal geteilt werden kann, weil es unbegrenzt und einmal so, einmal anders ist, während vom Geraden nur der kleinste Teil unteilbar, begrenzt und immer der gleiche ist.

Sie <die geradungerade Zahl> entsteht aber, wenn die Zweiheit die in der geordneten Reihe ungeraden Zahlen multipliziert, damit, weil die Gnomone sich um zwei voneinander unterscheiden, aber auch der multiplizierende Faktor zwei ist, der Unterschied der einander folgenden Ergebnisse die Vierzahl ist; denn die ist zweimal zwei <Die Gnomone sind die Ungeraden: 3, 5, 7, 9, 11 usw.; 3 · 2 = 6; 5 · 2 = 10; 10 - 6 = 4; 7 · 2 = 14; 9 · 2 = 18; 18 -14 = 4>.

Und wenn wir mit der potentiell ungeraden Zahl beginnen <der 1>, ergibt sich, als der potentielle geradungerade Wert, die Zwei <1 · 2 = 2>; beginnen wir aber mit der <ersten> aktuell ungeraden Zahl, der Drei, ergibt sich aktuell die 6. So werden nun in der natürlichen Reihe der Zahl solche Zahlen durch die Zwei ihre Art erhalten, drei aber **[23]** auslassen, durch die Vier sich unterscheiden und als die fünften voneinander entfernt stehen.

Weil sich aber zeigte, dass das Zusammenhängende, nämlich die <geometrische> Größe, das Gegenteil des Geteilten, nämlich der <arithmetischen> Größe, erduldet, so verwendet bereits die frühere Art die Proportion der <geometrischen> Größe, doch wird diese auch die <Proportion> der <arithmetischen> Größe anwenden wie wohl auch deren Gegenteil, und nach dem arithmetischen Mittel werden die zueinander addierten Außenzahlen den mittleren Zahlen gleich sein; in der ungeradzahligen <Reihe> aber der zu sich selbst (das heißt ihrem Doppelten) addierten Mittelzahl; so wie das auch bei der geometrischen Reihe beim grademal Geraden geschieht, dass die miteinander multiplizierten Außenzahlen und die Zahlen neben ihnen bis zur Mitte hin dem Produkt der Mittelzahl mit sich selbst gleich ist, oder bei zwei mittleren Zahlen, die auch miteinander multipliziert werden, so wie auch ihre Randzahlen auf beiden Seiten, natürlich in geradzahliger Reihe.

ἴδιον δὲ τοῦ εἴδους τούτου ὑπεναντίον τῷ τοῦ προτέρου τὸ μόνον ἢ ὑπὸ ἀρτίου περισσῶς ἢ ὑπὸ περισσοῦ ἀρτίως κατὰ ἀναστροφὴν μετρεῖσθαι.

Ἐπειδὴ δὲ ἐνταῦθα προδηλότερον ἁμάρτημα παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ ἐστὶ τὸ μὴ διακρίνειν ἀρτιοπέρισσον περισσαρτίου μηδὲ τὸν ἕτερον μὲν αὐτῶν ἀντικεῖσθαι ἀρτιάκις ἀρτίῳ τὸν δὲ λοιπὸν ἀμφοτέρων μῖγμα νομίζειν, ἔτι σαφέστερον περὶ τοῦ τρίτου λέγωμεν, αὐτὸ τὸ Εὐκλείδου ῥητὸν προεκθέμενοι περὶ αὐτῶν.

λέγει γὰρ οὕτως· 'ἀρτιοπέρισσος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπ' ἀρ[**24**]τίου ἀριθμοῦ μετρούμενος περισσάκις.'[11] ὁ δὲ αὐτὸς καὶ περισσάρτιός ἐστι· καὶ γὰρ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρεῖται ἀρτιάκις, οἷον λόγου χάριν ὁ ϛ'· ἐὰν μὲν γὰρ δὶς τρία λέγωμεν, ἀρτιοπέρισσος, ἐὰν δὲ τρὶς δύο, περισσάρτιος· πάνυ εὐήθως.

ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν ἀριθμητικῶν τοὺς τρεῖς εἰς ἕνα συγχέει, δουλεύων δηλονότι τῇ τοῦ ὀνόματος ἐμφάσει· φησὶ γάρ·[12] 'ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις τέ ἐστι περισσὸς καὶ περισσάκις ἄρτιος', τὸ αὐτὸ δηλονότι τοῖς ἔμπροσθεν λέγων. εἶτ' ἐπιφέρει· 'ἐὰν ἄρτιος μήτε τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισσὸν μήτε τῶν ἀπὸ μονάδος ᾖ διπλασιαζομένων, ἀρτιάκις τέ ἐστιν ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περισσὸς ὁ αὐτὸς καὶ περισσάκις ἄρτιος.' καὶ ὁ μὲν Εὐκλείδης οὕτως· ἡμῖν δὲ μᾶλλον λεγέσθω τὸ τρίτον εἶδος ὃ κοινῶς ἐξ ἀμφοῖν πλάσσεταί τε καὶ εἰδοποιεῖται καὶ συμβεβηκότα ἴσχει.

ἔστιν οὖν καὶ τῷ ὅρῳ κρᾶμα αὐτῶν· ὑπό τε γὰρ ἀρτίου ἀρτιάκις μετρεῖται καὶ ὁ αὐτὸς ὑπὸ ἀρτίου περισσάκις, οὐδετέρῳ δὲ τῶν προτέρων τοῦθ' ἅμα συμβέβηκεν, ἀλλὰ θάτερον μόνον θατέρῳ.

[11] Euklid, Elemente 7, Def. 9
[12] Euklid, Elemente 9, Satz 33.34

Die Eigentümlichkeit dieser Zahlenart besteht im Gegensatz zur vorhergehenden aber darin, dass sie nur entweder von einer geraden Zahl ungerade oder umgekehrt von einer ungeraden Zahl gerade gemessen wird.

Ungerademal gerade Zahlen

Da aber hier ein ziemlich deutlicher Fehler bei Eukleides vorliegt, weil er zwischen gerademalungerade und ungerademalgerade nicht unterscheidet, auch nicht annimmt, dass die eine von beiden Arten <nämlich gerademal Ungerade> dem gerademal Geraden entgegensteht, und da er den Rest <ungerademal Gerade> eine Mischung von beiden sein lässt, wollen wir über die dritte Art noch klarer sprechen, jedoch zuvor den Satz selbst des Eukleides darüber hersetzen.

Er lehrt nämlich, wie folgt: "Gerademal ungerade ist die Zahl, [**24**] die sich von einer geraden Zahl ungerademal messen läßt". Dieselbe Zahl ist jedoch auch ungerademalgerade, denn sie wird auch von einer ungeraden Zahl gerademal gemessen, wie zum Beispiel die 6; wenn wir nämlich zweimal drei sagen, ist sie gerademalungerade, sagen wir dagegen dreimal zwei, ist sie ungerademalgerade; und das ist sehr einfältig.

Aber auch im dritten der arithmetischen <Bücher> wirft Eukleides die drei Zahlenarten in eine zusammen, indem er sich offenbar sklavisch an den Wortlaut hält. Er sagt nämlich: "Wenn eine gerade Zahl eine ungerade Zahl als Hälfte hat, dann ist sie sowohl gerademal ungerade als auch ungerademal gerade." Damit sagt er offenbar dasselbe wie im Vorangehenden. Dann fügt er noch hinzu: "Wenn eine gerade Zahl weder eine ungerade Zahl als Hälfte hat noch zu denen gehört, die durch Verdopplung von der Eins aus entstehen, dann ist sie sowohl gerademal gerade als auch zugleich gerademal ungerade und ungerademal gerade." Soweit Eukleides; wir jedoch wollen lieber von einer dritten Art <gerader Zahlen> sprechen, die gemeinsam aus beiden gebildet und in ihrer Art bestimmt wird und gemeinsame Merkmale besitzt <ungerademal gerade>.

Es gibt nun auch in der Definition eine Mischung von ihnen; wird doch dieselbe Zahl von einer geraden Zahl gerademal gemessen <z.B. $24 = 2 \cdot 12$> wie auch von einer geraden Zahl ungerademal <z.B. $24 = 3 \cdot 8$>, und auf keine der beiden vorhererwähnten Zahlen traf dieses Merkmal gleichzeitig zu, sondern immer nur je eine Bedingung auf eine der beiden Zahlen.

καὶ μὴν τὸ πλεονάκις μὲν τοῦ ἅπαξ διαιρεῖσθαι παρὰ τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου ἔχει, τὸ δὲ μὴ μέχρι μονάδος δύεσθαι παρὰ τοῦ ἀρτιοπερίσσου·

καὶ τὸ μὲν ἀντιπαίεσθαι τὰ τῶν μερῶν ὀνόματα ὑπὸ τῶν δυνάμεων κοινωνεῖ τῷ δευτέρῳ, τὸ δὲ ἅμα καὶ ὁμωνυμεῖν οὐκ ἀπήλλακται τοῦ προτέρου, ἀπό τε τοῦ μείζονος ἄκρου ὅτι πλεονάκις ἢ ἅπαξ διχοτομεῖται προστρέχει **[25]** τῷ μέχρι μονάδος αὐτῷ, ἀφιστάμενος τοῦ ἅπαξ μόνον διχαζομένου· πρὸς δὲ τῷ ἐλάττονι καὶ ἄλλα διαλυτὰ ἔχων ἀφίσταται μὲν τούτου τέως, προσεχὴς δὲ τῷ ἐναντίῳ γίνεται.

καὶ ἡ γένεσις δ' αὐτοῦ ἐξ ἀμφοῖν μικτή. τοὺς μὲν γὰρ τοῦ ἀρτιοπερίσσου γνώμονας ἐκθέσθαι δεῖ πάντας ἑξῆς ἀπὸ τριάδος, τοὺς δὲ ἀρτιάκις ἀρτίους αὐτοὺς ἐπὶ ἑαυτῶν καὶ γνώμονες ἀπὸ τετράδος τάξει, καὶ ὁποτερωθενοῦν, ἀδιάφορον γάρ, τῷ πρώτῳ τὴν προτέραν ἔκθεσιν καθ' ἕκαστον ἐξ ἀρχῆς μηκυντέον μέχρι τις θέλει, εἶτα τῷ δευτέρῳ πάλιν τοὺς αὐτοὺς καὶ μετὰ ταῦτα τῷ τρίτῳ, εἶτα πάλιν τῷ τετάρτῳ, καὶ ἐπ' ἄπειρον. ἐὰν μὲν γὰρ τοῖς τοῦ ἅπαξ διαιρετοῦ γνώμοσιν οἱ τοῦ ἑτέρου πολυπλασιασθῶσι, γενήσονται πρῶτον μὲν ὀγδοάδι ἀλλήλων διαφέροντες, διπλάσιοι ἄρτιοι περισσῶν, ἐπίπλαστος περισσάρτιοι εὔτακτοι εὐτάκτων.

εἶτ' ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς οἱ αὐτῶν τούτων διπλάσιοι τῶν ἐξ ἀρχῆς τετραπλάσιοι, τετραπλασίᾳ πρὸς ἐκείνους χρώμενοι διαφορᾷ, πρὸς δὲ τοὺς πρὸ αὐτῶν ἀναγκαίως διπλασίᾳ, καὶ τοῦτο δι' ὅλου ἀναλόγως καὶ τοῦ μήκους ὑποφαινομένου.

Unsere Zahl besitzt aber auch die Eigenschaft, mehr als einmal geteilt zu werden, nämlich von dem gerademal Geraden, andererseits jedoch die Eigenschaft, nicht bis zur Eins herab durch zwei geteilt zu werden, von dem gerademal Ungeraden <z.B. 12 : 2 = 6; 6 : 2 = 3; aber 3 : 2 ist nicht ganzzahlig teilbar>.

Und die Eigenschaft, dass die Namen der Teile dem Produkt widersprechen, hat diese Zahl mit der zweiten <gerade mal ungerade> gemeinsam, die Eigenschaft aber, zugleich gleichnamig zu sein, ist von der ersten Zahl <der gerademal geraden> nicht entfernt, und dass sie von der größeren Außenzahl öfters als einmal geteilt wird, **[25]** kommt zur Teilung bis herab zur Eins bei ihr hinzu, wobei sie aber die Eigenschaft, nur einmal durch zwei geteilt zu werden, ablegt. Dadurch aber, dass diese Zahl neben der kleineren <Zahl> auch andere Divisoren hat, entfernt sie sich insoweit von dieser <gerademal Ungeraden> und nähert sich der gegenteiligen <Scholiast: Der gerademal Geraden>.

Auch die Entstehung dieser Zahl stellt eine Mischung aus beiden dar. Man muss nämlich alle Gnomone des gerademal Ungeraden in Reihe nacheinander von der Drei an nehmen und hinstellen; die reinen gerademal Geraden selbst aber soll man in eigener Reihe für sich hinstellen und die Gnomone von der Vier und nun muss man, mit einer beliebigen der beiden Reihen beginnend (es ist nämlich gleichgültig, mit welcher), mit der ersten Zahl die andere Reihe einzeln von der ersten Zahl an so weit multiplizieren, wie man will <3 · 4; 3 · 8; 3 · 16 usw.>; dann wiederum multipliziert man mit der zweiten Zahl dieser Reihe die gleichen Zahlen <5 · 4; 5 · 8; 5 · 16 usw.>, danach mit der dritten, dann wieder mit der vierten und so ins Unendliche. Wenn nämlich die Gnomone des gerademal Geraden mit den Gnomonen des nur einmal Teilbaren <des gerademal Ungeraden> multipliziert werden, dann werden in der ersten Kolumne jene Zahlen entstehen, die sich um jeweils acht voneinander unterscheiden <12, 20, 28, 36>, die doppelten Geraden <2 · 4 = 8> von den ungerademal Ungeraden, die falschen ungerademal Geraden, wohlgeordnete von wohlgeordneten.

Dann wieder von einem anderen Ausgangspunkt aus <3 · 8; 5 · 8; 7 · 8; 9 · 8> werden die Doppelten gerade dieser Zahlen die Vierfachen der anfänglichen Zahlen sein, wobei sie jenen gegenüber den vierfachen Unterschied aufweisen, gegenüber denen vor ihnen aber notwendigerweise den doppelten <12 · 2= 24; 20 · 2 = 40; 28 · 2 = 56>, und dies zeigt sich analog in der ganzen Länge der Reihe <horizontal; unter jedem Gnomon steht eine gerademal gerade Zahl>.

ἐὰν δὲ ἔμπαλιν τοῖς τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου οἱ τοῦ ἀρτιοπερίσσου, τὰ μὲν αὐτὰ συμβήσεται, μεταστήσεται δὲ εἰς ἄλληλα τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, ὡς ἐν ἀμοιβῇ. ἵνα μέντοι προδηλότερον ἠγνοηκὼς ὁ Εὐκλείδης ταῦτα φανῇ, παρα**[26]**τηρητέον καὶ κατὰ τὰς ἐπὶ πλέον ἐκθέσεις ἔν τε μήκει καὶ πλάτει τὰ ἀμφοτέροις ἐκείνοις συμβεβηκότα ἅμα τούτῳ ὑπάρχοντα μόνῳ ὡς ἂν μίγματι αὐτῶν· τῇ γὰρ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ χρήσεται ὡς ὁ ἀρτιάκις ἄρτιος τὸ ὑπὸ ποιῶν τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἢ ὑπὸ τῶν μέσων παρὰ τὴν τῆς ἐκθέσεως ποσότητα, τῇ δὲ ἀριθμητικῇ ἴσα συναμφότερα τὰ περιέχοντα τὸ μέσον ἢ τὰ μέσα ἀποτελῶν, ἢ δὶς τῷ ἑνὶ ἢ ἅπαξ τοῖς δυσίν.

οὕτως ἐν ἅπασι κοινῶς ἀμφοῖν καὶ ὡσανεὶ ἔκγονος οὗτος δείκνυται, ἀντικειμένων ἀλλήλοις τῶν προελθόντων τοῦ ἀρτίου εἰδῶν, οὐ πάντῃ διαφέρων ἑκατέρου οὔτε πάντῃ ὁ αὐτὸς ὤν. εὐθυντέον δὴ τοὺς Εὐκλείδου ὅρους καὶ λεκτέον ὅτι ὁ μόνον ὑπ' ἀρτίου περισσάκις ἀρτιοπέρισσος, ὁ δ' οὐδέποτε μόνον θάτερον ἀλλ' ἀμφότερα ἐξ ἀνάγκης ἀεὶ ἔχων ὅπερ οὐδέτερος ἐκείνων <περισσάρτιος, ἀ>μφότεροι δὲ ἅμα κρᾶμα εὐλόγως ἀμφοτέρων τῇ τοῦ λοιποῦ μετοχῇ τοῦ ἑτέρου ἀφιστάμενοι.

Τοῦ δὲ περισσοῦ ἀριθμοῦ πάλιν καθ' ὑποδιαίρεσιν τὸ μέν ἐστι πρῶτον καὶ ἀσύνθετον τὸ δὲ δεύτερον καὶ σύνθετον, καὶ ἄλλως τὸ μὲν καθ' αὑτὸ πρῶτον, ὃ δὴ καὶ εὐθὺς πρὸς ἄλλο πρῶτον καὶ ἀσύνθετόν ἐστι, τὸ δὲ καθ' αὑτὸ δεύτερον, ὃ οὐκ ἀνάγκη καὶ πρὸς ἄλλο εἶναι δεύτερον, ἀλλ' αὐτοῦ τούτου τὸ μὲν πρὸς ἄλλο πρῶτον, τὸ δὲ καὶ πρὸς ἄλλο ἔσται δεύτερον καὶ σύνθετον.

Wenn man aber umgekehrt statt der Zahlen der geradema l geraden Reihe die Zahlen der gerademal ungeraden Reihe <nimmt>, wird einerseits dasselbe geschehen, andererseits werden Länge und Breite <in der Tabelle> ihren Platz miteinander tauschen, wie bei einem Wechsel.Damit sich aber Eukleides darin noch deutlicher als Ignorant erweist, muss man dazu beachten, **[26]** dass auch entsprechend den weiteren Reihen in Länge und Breite das, was jenen beiden Zahlenarten geschieht, bei dieser Zahl allein zugleich vorliegt, da sie ja eine Mischung aus beiden darstellt. Sie wird ja die geometrische Proportion gebrauchen wie die gerademal gerade Zahl, die das gleiche Produkt von so beschaffenen Randzahlen hat wie das Quadrat der mittleren Zahl oder das Produkt der mittleren Zahlen entsprechend der Quantität der Reihe, und sie gebraucht die arithmetische Proportion, indem sie beide Zahlen auf beiden Seiten der Zahl oder den Zahlen in der Mitte gleich macht, entweder der einen <mittleren> Zahl zweimal oder den zwei <mittleren> Zahlen einmal.

Auf diese Weise stellt sich diese Zahl bei allen beiden Zahlen <gerademal gerade und gerademal ungerade> gemeinsam und als eine Art von Abkömmling heraus, wobei die beiden vorangehenden Formen des Geraden einander entgegengesetzt sind, diese Zahl aber von keiner der beiden anderen Zahlen völlig verschieden oder völlig identisch mit ihnen ist. Also muss man die Definitionen des Eukleides berichtigen und sagen, dass nur aus einer geraden Zahl ungerademal eine geradeungerade Zahl entsteht, dass aber die andere Zahl, die ungerademal gerade, niemals eine Eigenschaft von beiden allein hat, sondern zwangsläufig immer beide Eigenschaften zusammen aufweist, was keine von jenen beiden anderen hat, beide zusammen aber eine wohlgeordnete Mischung von beiden darstellen, und durch die Teilhabe am übrigen vom anderen abgetrennt sind.

Ungerade Zahlen

Von der ungeraden Zahl aber ist wiederum entsprechend der Untergliederung die eine Art das Erste <prim> und Unzusammengesetzte, die andere Art das Sekundäre und Zusammengesetzte; anders gesagt ist die eine <ungerade> Art für sich ein Erstes, das auch sogleich gegenüber einem anderen ein Erstes und Unzusammengesetztes ist; die zweite <ungerade> Art aber ist für sich schon etwas Sekundäres, das aber nicht gegenüber einem anderen ein Zweites sein muss; nein, von ihr entsteht eine dritte Art, nämlich das Erste gegenüber einem anderen, aber auch etwas Zweites und Zusammengesetztes gegenüber einem anderen.

πρῶτος μὲν οὖν καὶ ἀσύνθετος ἀριθμός ἐστι περισσὸς ὃς ὑπὸ μόνης μονάδος πλη**[27]**ρούντως μετρεῖται,[13] οὐκέτι δὲ καὶ ὑπ' ἄλλου τινὸς μέρους καὶ ἐπὶ μίαν δὲ διάστασιν προβήσεται ὁ τοιοῦτος. διὰ τοῦτο δὲ αὐτὸν καὶ εὐθυμετρικόν τινες καλοῦσι, Θυμαρίδας δὲ καὶ εὐθυγραμμικόν· ἀπλατὴς γὰρ ἐν τῇ ἐκθέσει ἐφ' ἓν μόνον διστάμενος.

ἴδιον δ' αὐτοῦ τὸ μὴ ἔχειν μέρος ὅτι μὴ μόνον τὸ παρώνυμον αὐτῷ, οὗ μέγεθος ἐξ ἀνάγκης μονάς. πρῶτος δὲ καλεῖται οὐ μόνον ὅτι μέτρον αὐτοῦ μονὰς μόνη ἄλλος δὲ οὐδεὶς ἀριθμός (πρωτίστη δὲ καὶ στοιχεῖον ἀριθμοῦ ἡ μονάς), ἀλλὰ καὶ ὅτι οὐδεὶς πρὸ αὐτοῦ δύναται ἀριθμὸς θεωρηθῆναι, μονάδων γε ὢν σύστημα, οὗ αὐτὸς ἔσται πολυπλάσιος, ἀλλὰ πρῶτον δῆλον ὅτι ἑαυτὸν παρέξει εἰς τὸ ἄλλους τινὰς αὐτοῦ πολυπλασίους γενέσθαι· ἀσύνθετος δὲ ὅτι οὐκ ἂν λυθείη εἰς ἀριθμοὺς ἀλλήλοις ἴσους, ἐξ οὗ δῆλον ὅτι οὐδὲ συνετέθη ἐκ τοιούτων.

Δεύτερος δὲ καὶ σύνθετος ὁ τἀναντία τῷ λεχθέντι ἔχων μέρος τε παρὲξ τοῦ παρωνύμου ἢ ἓν ἢ πλέονα, μέτρον τε παρὰ τὴν μονάδα τὸν αὐτὸν τρόπον ἢ ἓν ἢ πλέονα.

ὁ δὲ τοιοῦτος πρὸς τῷ γραμμικῶς εὐθυμετρεῖσθαι ἔτι καὶ ἐπιπεδωθήσεται ἤτοι γε τετραγωνικῶς ἐὰν ἓν ἔχῃ μέρος παρὲξ τοῦ παρωνύμου, ἢ παραλληλογράμμως ἐὰν ἐκ παντὸς δύο ἀνθυπακούοντα ἀλλήλοις ἔχῃ μέρη παρὰ τὴν τῶν πλευρῶν διαφοράν. πλείονα δ' ἂν ἐπ' ἀμφοτέρων εὑρεθείη πολυπλασίου, περισσάκις γενομένης τῆς ἐκθέσεως ἕως τῶν ἐξ ἀρχῆς.

[28] καλεῖται δὲ δεύτερος μὲν ὅτι καὶ δευτέρῳ τινὶ μέτρῳ ἢ καὶ πλείοσι παρὰ τὴν μονάδα χρᾶται, καὶ ἐν πολυπλασίοις οὐδέποτε πρῶτος ἀλλὰ μετὰ πρῶτον ἢ πρώτους ἀνάλογον τάσσεται· σύνθετος δὲ ὅτι καὶ εἰς ἀριθμοὺς ἴσους οἷός τέ ἐστι λύεσθαι, ἐξ οὗ φανερὸν ὅτι καὶ συνετέθη ἐκ τοιούτων.

[13] Euklid, Elemente VII, Def. 12

Die Primzahl nun und unzusammengesetzt ist die ungerade Zahl, die nur von der Eins allein vollkommen **[27]** gemessen wird, nicht mehr aber auch von irgendeinem anderen Teil, und die so geartete <Zahl> wird in einer einzigen Ausdehnung <Dimension> voranschreiten. Daher nennen aber manche diese Zahl auch linear; Thymaridas jedoch nennt sie auch geradlinig; ist sie doch in der Reihe ohne Breite und dehnt sich immer nur in einer Art von Ausdehnung aus.

Ihre Charakteristik aber besteht darin, dass sie keinen Teil hat, es sei denn einzig und allein den mit ihr gleichnamigen. Die Größe <dieses Bruches ist> notwendigerweise die Eins. Primzahl aber wird sie genannt nicht nur, weil ihr Maß nur die Eins allein ist und keine andere Zahl (die Eins steht aber ganz am Anfang und ist das Element einer Zahl), sondern auch, weil keine Zahl ihretwegen untersucht werden kann; liegt hier doch eine Zusammenstellung von Einheiten vor, von der sie selbst nur ein Vielfaches ist. Doch ist es bei der Primzahl klar, dass sie sich selbst darbieten wird, damit weitere Zahlen entstehen, die ein Vielfaches von ihr bilden; sie ist aber eine nicht zusammengesetzte Zahl, weil sie nicht in andere einander gleiche Zahlen aufgelöst werden kann, woraus hervorgeht, dass sie auch nicht aus solchen zusammengesetzt wurde.

Die sekundäre, zusammengesetzte Zahl aber ist eine solche, die im Gegensatz zu dem Gesagten entweder einen Teil oder mehrere außer dem ihr selbst gleichnamigen <z.B. 15 hat die Teiler 3, 5, 15> und neben der Eins in gleicher Weise entweder ein Maß hat oder mehrere.

Die so beschaffene Zahl aber wird zu der Eigenschaft, geradlinig gemessen zu werden, auch noch flächig auftreten können, und zwar rechteckig, wenn sie einen Teil neben dem ihr gleichnamigen hat, oder als Parallelogramm, wenn sie durchwegs zwei einander gegenseitig entsprechende Teile entsprechend den verschiedenen Seiten hat. Man könnte aber mehr als das Vielfache bei beiden finden, wenn die Reihe ungerademal bis zu den <Zahlen> vom Anfang reicht. **[28]**

Sie wird aber "zweite" <sekundäre> Zahl genannt, weil sie auch eine Art von zweitem Maß oder auch mehrere Maße neben der Eins gebraucht und in Vielfachen niemals als die Primzahl hingestellt, sondern zu einer Primzahl oder Primzahlen in Proportion gesetzt wird; "zusammengesetzt" aber heißt sie, weil sie auch in gleiche Zahlen aufgelöst werden kann, woraus deutlich wird, dass sie auch aus derartigen Zahlen zusammengesetzt ist.

᾿Απ' ἄλλης δὲ ἀρχῆς τοῦ δευτέρου εἴδους τὸ μὲν καὶ καθ' ἑαυτὸ καὶ πρὸς ἄλλο δεύτερον καὶ σύνθετόν ἐστι ὡς θ′ πρὸς ιε′ ἢ κα′, τὸ δὲ καθ' ἑαυτὸ μὲν δεύτερον πρὸς δὲ ἄλλο πρῶτον ὡς τὰ θ′ πρὸς τὰ κε′ ἢ λε′.

ἑτέροις μὲν γὰρ καθ' ἑαυτοὺς οὗτοι μέτροις ἄνευ τῆς μονάδος χρῶνται, πρὸς δὲ ἀλλήλους μόνῃ ταύτῃ. παραιτητέοι δὲ οἱ λέγοντες ἀνάπαλιν εἶναί τινα καθ' ἑαυτὸν πρῶτον καὶ ἀσύνθετον πρὸς δὲ ἄλλον δεύτερον καὶ σύνθετον· ἐξαπατῶνται γὰρ τὸ μέτρον αὐτὸ τῷ μετρουμένῳ συγκρίνοντες, καὶ οὐχ ὁρῶσιν ὅτι κοινὸν δεῖ μέτρον ἄλλο παρὰ τὴν μονάδα καὶ παρ' ἀμφοτέρους ἔχειν.

εἴ τινι συμβήσεται πρὸς ἄλλον, οὗτος καὶ καθ' ἑαυτὸν ὢν δεύτερος ἔσται καὶ πρὸς ἄλλον δεύτερος. δυνατὸν δὲ ἐκ τῶν ἐναντίων καθ' ἑαυτὸν ἔχοντα δευτέρως πρὸς ἄλλον μὴ ἔχειν. ἐὰν δύο τυχόντες περισσοὶ προβληθῶσιν εἰς διάγνωσιν τοῦ πότερον πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἢ δεύτεροί εἰσι, καὶ εἰ δεύτεροι τί κοινὸν αὐτῶν μέτρον, ἀνθυφελοῦμεν ἀεὶ τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος ὁσάκις δυνατὸν καὶ τὸ λεῖπον ἀπὸ τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐλάσσονος καὶ ὁμοίως ἀεί, μέχρις ἂν ἤτοι εἰς μονάδα ἡ κατάληξις γένηται ἢ **[29]** εἴς τινα ἄλλον ἀριθμόν, ἀφ' οὗ οὐκέτ' ἀφαιρεῖν οἷόν τε, καὶ οὗτος κοινὸν ἂν εἴη μέτρον τῶν ἐξ ἀρχῆς, οἵπερ δεύτεροι πρὸς ἀλλήλους λεχθήσονται, ὡς ιε′ καὶ λε′· κοινὸν γὰρ αὐτῶν μέτρον ἡ πεντάς.[14]

ἡ δὲ μονὰς πρώτους αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους καὶ ἀσυνθέτους ἀποφαίνει, ὅταν εἰς αὐτὴν ἡ κατάληξις γίνηται· τοιούτων γὰρ κοινὸν μέτρον αὕτη μόνη.

Ἵνα δὲ τάξει πάντας ἡμεῖς τοὺς δευτέρους καὶ συνθέτους καθ' ἑαυτούς τε καὶ πρὸς ἀλλήλους εἰδῶμεν γεννᾶν, καὶ μέτρα αὐτῶν καὶ τὰ ἀντιπαρονομαζόμενα μέρη ὅσα ἂν ᾖ, ἔφοδον τοιαύτην τιν' ἰστέον, ἥτις ὡσανεὶ κόσκινον τοὺς μὲν τοιούτους ἐντὸς τοῦ λόγου καθέξει, τοὺς δὲ λοιποὺς, δηλονότι πρώτους καὶ ἀσυνθέτους, ὥσπερ ἐκβόλους ἀποχωρίσει.

[14] Euklid, Elemente VII, 2

Von einem anderen Ausgangspunkt aus verhält sich aber von der zweiten Art <des zweiten Ungeraden und Zusammengesetzten> das sowohl für sich wie auch in Relation zu einem anderen Zweite und Zusammengesetzte wie 9 zu 15 oder 21, und das für sich Zweite, gegenüber einem anderen aber Erste wie 9 zu 25 oder 35 <3 ist Teil von 9, nicht von 25; 5 ist Teil von 25, nicht von 9>.

Diese Zahlen nämlich werden für sich selbst nach anderen Maßen ohne die Eins gemessen, gegeneinander jedoch nur durch diese. Diejenigen aber sind zurückzuweisen, die im Gegenteil sagen, es gebe eine Zahl, die für sich eine Primzahl und unzusammengesetzt, gegenüber einer anderen Zahl aber sekundär und zusammengesetzt sei. Sie gehen nämlich in die Irre, indem sie das Maß selbst mit dem Gemessenen vergleichen, und sehen nicht, dass man neben der Eins und neben beiden Zahlen zusammen ein gemeinsames anderes Maß haben muss.

Wenn eine <ungerade> Zahl gegenüber einer anderen sekundär ist, wird diese Zahl sowohl für sich selbst sekundär wie auch gegenüber einer anderen sekundär sein. Es ist jedoch im Gegenteil möglich, dass eine Zahl, die für sich selbst sekundär ist, es gegenüber einer anderen nicht ist. Wenn nämlich zwei Zahlen, die ungerade sind, der Untersuchung unterworfen werden, ob sie prim zueinander oder sekundär sind, und, wenn sie sekundär sind, was ihr gemeinsames Maß ist, dann nehmen wir immer wieder die kleinere Zahl von der größeren weg, so oft es möglich ist, und den Rest von dem von Anfang an Kleineren und so immer fort, bis wir schließlich entweder bei der Eins aufhören oder **[29]** bei irgendeiner anderen Zahl, von der man nichts mehr wegnehmen kann, und diese ist wohl das gemeinsame Maß der anfänglichen Zahlen, die man als sekundär gegeneinander bezeichnen wird, wie z.B. 15 und 35; ihr gemeinsames Maß ist nämlich die Fünf.

Die Eins aber zeigt, dass sie prim zueinander und nicht zusammengesetzt sind, wenn das Ende der Operation auf sie hinausläuft. Für solche Zahlen nämlich ist sie allein das gemeinsame.

Damit wir jedoch in guter Ordnung alle die sekundären und zusammengesetzten Zahlen für sich und gegeneinander hervorzubringen wissen, dazu ihre Maße und die im Ausdruck entgegengesetzten Teile, so viele es gibt, müssen wir eine solche Methode kennen, die wie ein Sieb die so beschaffenen Zahlen innerhalb der Berechnung zurückhält, die übrigen jedoch (das sind natürlich die Primzahlen und nicht zusammengesetzten Zahlen) wie ausgesiebt ausscheiden wird.

στοιχηδὸν εὐτάκτους τοὺς ἀπὸ τριάδος περισσοὺς ἐφεξῆς ὡς ὅτι μάλιστα ἐπὶ μήκιστον ἐκθοῦ, καὶ τῷ πρώτῳ πειρώμενος μετρεῖν πληρούντως τῶν ἐφεξῆς δυνήσῃ τοὺς δύο μέσους παραλιπόντας ἐπ' ἄπειρον, τῷ δὲ δευτέρῳ τοὺς τέσσαρας μέσους διαλείποντας, τῷ δὲ τρίτῳ τοὺς ἓξ καὶ τετάρτῳ τοὺς ὀκτὼ καὶ ἁπλῶς ἑκάστῳ τοὺς διπλασίους τῆς ἑαυτοῦ τάξεως διαλείποντας.

ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἕκαστος κατὰ τὸ ἑαυτοῦ ὄνομα τοὺς παρωνύμως ἀφεστῶτας μετρήσει, ὡς ὁ γʹ δύο ὑπερβὰς τρίτους ἀεί, καὶ τοῦτο ἀκολούθως. ἀλλ' ὁ μὲν πρῶτος κατὰ τὸ ἑαυτοῦ μέγεθος τρὶς τὸν μετ' αὐτὸν πρώτως μετρούμενον μετρήσει, τὸν δὲ μετ' ἐκεῖνον πεντάκις κατὰ τὸ τοῦ ἑξῆς μέγεθος, τὸν δὲ ἐκείνῳ ἐφεξῆς κατὰ τὸ τοῦ τρίτου, καὶ τοῦτο δι' ὅλου παραπλησίως·

[30] ὁ δὲ δεύτερος μεταλαβὼν τὸ τοιοῦτον τὸν μὲν ἀπ' αὐτοῦ πέμπτον τῷ τοῦ ἔμπροσθεν μεγέθει, τὸν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἐκείνου πάλιν πέμπτον τῷ ἑαυτοῦ, τὸν δὲ ἐφεξῆς πάλιν πέμπτον τῷ τοῦ μετ' αὐτὸν καὶ τοῦτο μέχρι παντός, τὸ δ' ὅμοιον καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

καὶ ἡ τοῦ δυνάμει δὲ περισσοῦ ἔννοια, τουτέστι μονάδος, κἀνταῦθα παραφανήσεται, ὁπόταν ἕκαστος τῶν ἐκκειμένων παραλαβὼν τὸ μετρεῖν καὶ ἑαυτὸν πολυπλασιάζων τετράγωνον ποιῇ, ὡς ἀπὸ τοῦ τρὶς τρία ὁ θʹ.

ἐν δὲ τοῖς τοιούτοις ἡ ταυτότης, ἥπερ ἐστὶ παρὰ τὴν μονάδα ὡς ἅπαξ θʹ, ἡ δ' ἑτερότης ἐπὶ παρὰ τὴν δυάδα ἐστὶν εὐλόγως καὶ οἱ ἀπὸ διαφόρων ἀριθμῶν ἀλλήλους πολυπλασιασάντων γενόμενοι διαφόρους καὶ τὰς πλευρὰς ἕξουσιν ἀντιφωνούσας κατὰ τὰ τῶν γνωμόνων μεγέθη, καὶ ὁ τοιοῦτος προμήκης κεκλήσεται.

τοῦ σαφοῦς δὲ ἕνεκα τὸ μὲν ποσάκις μετρεῖν αὐτοῖς κατὰ τὴν τῶν ἀπὸ τριάδος ἐπ' ἄπειρον περισσῶν ἔκθεσιν φανήσεται, Stelle in guter Ordnung alle ungeraden Zahlen von der Drei an in Reihe hintereinander so weit wie nur immer möglich, und wenn du mit der ersten zu messen versuchst, wirst du vollständig von den folgenden Zahlen diejenigen, die zwei dazwischen auslassen, bis ins Unendliche messen können; mit der zweiten Zahl <5> aber die Zahlen, die die mittleren vier Zahlen auslassen; mit der dritten Zahl <7> die sechs Zwischenzahlen überspringenden, mit der vierten <9> die mit acht ausgelassenen Zahlen und so einfach stets mit den Zahlen, die das Doppelte ihres Reihenwertes <in der Reihe der ungeraden Zahlen, die mit drei beginnt> auslassen <also: 3 lässt 2 aus, 5 lässt 4 aus; 7 lässt 6 aus. 5 steht an zweiter Reihenstelle und lässt 4 aus; 4 = 2 mal 2>.

Daraus geht nun deutlich hervor, dass jede Zahl entsprechend ihrem Namen alle im gleichnamig benannten Abstand von ihr stehenden Zahlen messen wird, so zum Beispiel die 3, die zwei überspringt und die jeweils dritten Zahlen misst, und so in weiterer Folge. Die erste Zahl <3> aber wird entsprechend ihrer Größe die erste gemessene Zahl nach ihr dreimal messen <9 : 3 = 3>, die nach der 9 gemessene Zahl entsprechend der <auf die 3> folgenden Größe <in der Reihe der ungeraden Zahlen> fünfmal <15 : 3 = 5>, die jener <15> in der Reihe folgende Zahl <21> entsprechend dem Zahlenwert der dritten <7> und so durchgehend in gleicher Weise. **[30]**

Die zweite Zahl aber <5> übernimmt diese Methode und misst die von ihr an fünfte Zahl <15> durch die Größe der vorhergehenden Zahl <3; 15 : 3 = 5>, dann wieder von jener Zahl <15> an die fünfte durch ihre eigene Größe <25 : 5 = 5> und wiederum die in der Folge fünfte Zahl <35> durch die nach ihr selbst <der 5> kommende Größe <7; 35 : 7 = 5>, und so immer weiter; ebenso verfährt man aber auch bei allen übrigen dieser Zahlen.

Und der Begriff des potentiell Ungeraden, das heißt der Eins, wird auch dann hervortreten, wenn jede der vorliegenden Zahlen das Messen übernimmt, sich selbst vervielfacht und quadratisch macht, wie etwa aus dreimal drei 9 entsteht.

In derartigen Zahlen ist aber die Identität, die nach der Einheit besteht wie einmal 9, aber auch die Verschiedenheit, da sie nach der Zweiheit in vernünftiger Weise ist, und die aus verschiedenen Zahlen, die einander multiplizieren, entstandenen Produkte werden auch Seiten haben, die entsprechend der Größe der Gnomone in der Reihe nicht übereinstimmen, und eine solche Zahl wird als länglich (promek) bezeichnet.

Zur Verdeutlichung: Bei ihnen wird sich, entsprechend der Reihe der ungeraden Zahlen von der Drei an bis zum Unendlichen, zeigen, wievielmal sie messen;

τὸ δὲ πόσους διαλείποντας κατὰ τὴν τῶν ἀπὸ δυάδος ἀρτίων (σύμβολον καὶ τοῦτο τῆς τῶν δύο εἰδῶν τοῦ ἀριθμοῦ ἀιδιότητός τε καὶ φιλαλληλίας, εἰ καὶ ἐναντία δοκεῖ καθάπερ δεξιὰ ἀριστερῷ καὶ ὁμοίως συλληπτικὰ ἀλλήλοις) ἢ νὴ Δία κατὰ τὴν <τῆς> χώρας ἑκάστου διπλασίασιν, καθ' ἣν ὁ μετρῶν τέτακται.

οἱ μὲν οὖν ὑπὸ τῶν μετρήσεων τούτων σημανθέντες δεύτεροι δηλονότι καὶ σύνθετοι, κοινὸν δ' αὐτῶν μέτρον τὸ ἐπελθὸν αὐτοῖς· οἱ δὲ παραλειπόμενοι ὥσπερ τὰ διὰ κοσκίνου ἔκβολα πρῶτοι καὶ ἀσύνθετοι.

κἀνταῦθα δὲ ὁ Εὐκλείδης προδηλότατον ἁμάρτημα πάσχει τὴν δυάδα **[31]** τῶν πρώτων καὶ ἀσυνθέτων οἰόμενος εἶναι, ἐπεὶ μονάδι μόνῃ μέτρῳ χρῆται,[15] ἐκλελησμένος ὅτι ἡ μὲν τοῦ ἀρτίου εἴδους ἐστίν, ὅτι μέντοι περισσοειδὴς ἵνα δυνάμει τοὺς λόγους τῶν ὁμογενῶν ἀρτιάκις ἀρτίων καὶ ἀρτιοπερίσσων τρόπῳ σπερματικῷ, καθάπερ ἡ μονὰς ἁπάντων ἁπλῶς· οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἀσύνθετοι καθ' ὑποδιαίρεσιν τοῦ περισσοῦ εἴδους μόνου ὤφθησαν, ἀλλ' οὐ καὶ τοῦ ἀρτίου.

ἕτερον γοῦν ἄρτιον οὐκ ἂν δύναιτο προχειρίσαι οὐδὲ ἐπιταθείς, οὕτω φύσει τοῦ τοιούτου ἀπηλλάχθαι θάτερον τοῦ ἀριθμοῦ εἶδος, ὥσπερ καὶ τὸ λοιπὸν τῶν αὐτοῦ ὑποδιαιρέσεων ἀρτιάκις ἀρτίου τε καὶ ἀρτιοπερίσσου καὶ περισσαρτίου. ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ δυὰς ὡς ἂν στοιχειώδης οὖσα καὶ σπερματικὴ οὐ μετέχει τρανῶς τῶν ὑποδιαιρέσεων τούτων καίτοι τούτου τοῦ γένους ἄρχουσα αὐτοῖς, καθάπερ ἀμέλει καὶ ἐπὶ ἄλλων αἱ ἀρχαὶ πολλῶν οὐ μετέχουσιν ὧν ἐξ ἀνάγκης τοῖς συγκρίμασι μέτεστιν, ὥσπερ σημείῳ τὰ γραμμῇ συμβεβηκότα οὐκ ἐνθεωρεῖται καὶ τὰ διαστήματι φθόγγῳ καὶ τὰ ἀναλογίᾳ λόγῳ καὶ τὰ σωματικὰ ὕλῃ καὶ εἴδει καὶ τὰ πολλῶν ἑτέρων συστημάτων φαρμάκων τε καὶ μιγμάτων ἑκάστων προέχει στοιχείων.

[15] Euklid, Elemente VII, Def. 11

doch wird sich auch zeigen, wie viel Zahlen sie jeweils beim Messen entsprechend der Reihe der geraden Zahlen von der Zwei an auslassen (auch dies ist ein Zeichen der Ewigkeit der zwei Zahlenarten, zugleich aber auch ihrer gegenseitigen Zuneigung, wenn sie auch zueinander in Gegensatz zu stehen scheinen wie rechts zu links, aber doch in ähnlicher Weise einander zu ergänzen scheinen) oder, beim Zeus, gemäß der Verdoppelung der Position einer jeden, entsprechend der die messende Zahl ihren Platz hat.

Die nun durch diese Messungen bezeichneten Zahlen sind natürlich sekundär und zusammengesetzt, und ihr gemeinsames Maß ist das zu ihnen Hinzukommende; die übergangenen Zahlen aber (wie das vom Sieb Ausgeworfene) sind Primzahlen und nicht zusammengesetzte Zahlen.

Und hier passiert dem Eukleides ein ganz offenkundiger Fehler, da er meint, die Zwei **[31]** gehöre zu den Primzahlen und den nicht zusammengesetzten Zahlen, da er nur die Eins als Maß gebraucht, aber vergisst, dass die Zwei zwar zur geraden Art gehört, dass sie aber auch von ungerader Art ist und potentiell die Verhältnisse der gleichartigen grademal geraden Zahlen und der grademal ungeraden Zahlen keimartig - wie die Eins grundsätzlich von allen Zahlen - vereint. Die Primzahlen und nicht zusammengesetzten Zahlen aber traten durch Herausnahme allein der ungeraden Art vor das Auge, nicht aber durch Herausnahme auch der geraden Art.

Ein anderes Gerades <außer grademal gerade bzw. grademal ungerade> nun kann er wohl nicht beibringen, auch nicht, wenn er sich anstrengt, weil durch die Natur von einer so beschaffenen die andere Zahlenart <der beiden> so sehr abgegrenzt ist, wie auch im weiteren bei seinen Untereinteilungen das grademal Gerade, das Geradungerade und das Ungeradegerade. Aber auch diese Zweiheit, die wohl elementar ist und keimartig, nimmt nicht deutlich an diesen Untereinteilungen Anteil, obschon sie ihnen für diese Gattung den Ursprung bildet <grademal gerade und grademal ungerade>, wie natürlich auch in anderen Bereichen die Ursprünge an vielem nicht Anteil haben, woran die Zusammensetzungen notwendigerweise teilhaben, wie für einen Punkt das nicht in Betracht gezogen wird, was mit einer Linie geschieht, ebenso wie auch das, was dem Ton durch den Abstand, dem Verhältnis <a : b> durch die Proportion geschieht <a : b = c : d>, und wie das Körperliche durch Materie und Form und wie das Ergebnis vieler anderen Zusammenstellungen, von Medikamenten und Mischungen, allen seinen jeweiligen Elementen überlegen ist.

Πάλιν δὲ ἐξ ὑπαρχῆς τοῦ ἀρτίου ἀριθμοῦ καθ' ἑαυτὸν καὶ παντάπασιν ἀπηλλαγμένου τῆς πρὸς τὸν περισσὸν κἀνταῦθα ἐπιπλοκῆς τὸ μέν ἐστιν ὑπερτελὲς τὸ δὲ ἐλλιπὲς ἐναντία ἀλλήλοις, κοινὸν δ' [**32**] αὐτῶν καὶ οἱονεὶ μεσότης τὸ λεγόμενον τέλειον διαφέρον κατά τι ἀμφοῖν καὶ πάλιν ἀμφοῖν κατά τι μετέχον.

ὑπερτελὲς μὲν οὖν ἐστιν ὅταν ἄρτιος ἀριθμὸς πάντα τὰ αὑτοῦ μέρη συντεθέντα πλείονα ἀποδίδωσιν αὐτοῦ καὶ ὑπερπαίοντα τῇ ποσότητι· διὰ τοῦτο γὰρ καὶ οὕτως ὠνόμασται, ὡς πλημμελής τις ὢν καὶ πλεομελὴς καὶ πλεονέκτης, τεταγμένος ἐν τῷ οἷον ἀδικεῖν καὶ πλέον τι τοῦ ἐπιβάλλοντος αὐτῷ ἔχειν, ὡς εἴ τινι πλέονες δάκτυλοι ἐν μιᾷ χειρὶ ἢ ἐν ποδὶ εἶεν.

ἐλλιπὲς δὲ ὅταν ὁμοίως ἄρτιος ἀριθμὸς τοῖς ἑαυτοῦ πᾶσι μέρεσι συντεθεὶς συγκρινόμενος μείζων φαίνηται, τὰ δὲ μέρη ἐλάττονα ἑαυτοῦ ποιῇ, διὸ καὶ οὕτως ὠνόμασται, ἐστερημένος μερῶν τῶν εἰς συμπλήρωσιν αὐτοῦ προσηκόντων ὡσανεὶ πλεονεκτούμενός τις ἐν τῷ ἀδικεῖσθαι καὶ μὴ ἀπειληφέναι τὰ ἴδια, ὡς εἴ τις ἄγλωσσος εἴη ἢ μονόχειρ.

ὑπόδειγμα τοῦ μὲν προτέρου ὅ τε ιβʹ καὶ οἱ τούτου ἐπ' ἄπειρον πολυπλάσιοι καὶ ὁ ιηʹ καὶ ὁ κʹ καὶ ἄλλοι πολλοὶ τοιοῦτοι, τοῦ δὲ δευτέρου ὅ τε ηʹ καὶ ὁ ιʹ καὶ ὁ ιδʹ καὶ οἱ ὅμοιοι.

Τέλειον δέ ἐστιν ὃ τούτων μέσον θεωρεῖται καὶ οὔτε πλέονα ὡς τὸ ὑπερτελὲς οὔτε ἐλάσσονα ὡς τὸ ἐλλιπὲς τὰ μέρη ἑαυτοῦ συντεθέντα ἔχει, ἀλλὰ τὰ ἀνὰ μέσον τοῦ τε μείζονος καὶ τοῦ ἐλάσσονος, ὅπερ ἐστὶν ἴσα, ὡς ἂν δικαιότητί τινι καὶ τῶν ἰδίων καὶ προσηκόντων ἀπολήψει.

συνᾴδει δὲ τὰ τοιαῦτα παραδείγ**[33]**ματα τῷ τὰς ἀρετὰς ὀρθῶς νομίζεσθαι μετριότητάς τινας καὶ μεσότητας ὑπερβολῆς καὶ ἐλλείψεως, ἀλλ' οὐκ ἀκρότητας, ὥς τινες ὑπέλαβον εἶναι, καὶ ἀντικεῖσθαι μὲν κακὸν κακῷ, συναμφότερα δ' ἑνὶ ἀγαθῷ, ἀγαθὸν δὲ ἀγαθῷ μηκέτι, ἀλλὰ δυσὶν ἅμα κακοῖς, ὥσπερ δειλίαν θρασύτητι ὧν κοινὸν ἀνανδρία συναμφότερα δὲ ἀνδρείᾳ,

Teiler – Betrachtungen

Wiederum von Neuem aber gibt es bei der geraden Zahl an sich (und völlig abgesehen von ihrer Verbindung auch hier mit der ungeraden Zahl) einerseits das Überschießende, andererseits das Mangelnde, zwei einander entgegengesetzte Eigenschaften; ihnen gemeinsam aber [**32**] und sozusagen ihre Mitte ist das "Vollkommen" Genannte, das sich in gewisser Hinsicht von beiden Extremen unterscheidet und wiederum an beiden in gewisser Hinsicht teilhat.

Abundantes liegt nun vor, wenn eine gerade Zahl durch Addition aller ihrer Teile eine höhere Summe als sie selbst ergibt und <ihre> Größe übertrifft. Deshalb nämlich hat sie auch ihren Namen, weil sie gewissermaßen fehlerhaft, zu vielgliedrig oder habsüchtig ist, eingeordnet gewissermaßen ins Unrechttun und ins Mehrhaben als das auf sie Treffende, so als ob jemand zu viele Finger an einer Hand oder Zehen an einem Fuß hätte.

Defizientes aber liegt vor, wenn ebenfalls eine gerade Zahl beim Vergleich mit allen ihren addierten Teilen größer erscheint und die Summe ihrer Teile übersteigt, weshalb sie auch so <"Mangelzahl"> genannt ist, weil ihr die Teile mangeln, die sie zu ihrer Vollkommenheit braucht, so wie jemand Unrecht erleidet, weil er übervorteilt wird und sein Eigentum nicht bekam, oder als ob einer keine Zunge hätte oder nur eine Hand besäße.

Ein Beispiel für die erste Art ist die 12 und deren Mehrfaches bis ins Unendliche und die 18, die 20 und viele andere dieser Art <z.B. hat die 12 die Teiler 6, 3, 2 und 1, die zusammen 16 ergeben, also mehr als 12>; für die zweite Art sind Beispiele die 8, die 10, die 14 und die ähnlichen <z.B. hat die 8 die Teiler 4, 2 und 1, die zusammen nur 7 ergeben, also weniger als 8>.

Vollkommen aber ist dies, was als die Mitte dieser beiden betrachtet wird und das weder zu viele eigene zusammenaddierte Teile besitzt wie das Abundante noch zu wenig hat wie das Defiziente, sondern in der Mitte zwischen dem zu Großen und zu Kleinen liegt, und dies ist das Gleiche, entstanden sozusagen durch eine gewisse Gerechtigkeit und ein Erhalten des Eigenen und Zustehenden.

Solche Beispiele passen **[33]** zum rechten Verständnis der Tugenden als einer Art von mittlerer Haltung und als Mitte zwischen Übertreibung und Mangel, nicht jedoch als Extremhaltungen, wofür sie manche ansahen. So glaubt man auch, dass ein Schlechtes einem Schlechten gegenübersteht, beide zusammen aber einem einzigen Guten, ein Gutes jedoch nicht mehr einem Guten, sondern zwei Übeln zugleich, wie zum Beispiel die Feigheit der Verwegenheit, denen beiden gemeinsam die Unmännlichkeit ist, während sie beide selbst zusammen der Männlichkeit gegenüberstehen;

καὶ πανουργίαν ἠλιθιότητι ὧν κοινὸν ἀφροσύνη συναμφότερα δὲ φρονήσει, καὶ ἀσωτίαν φιλαργυρίᾳ ὧν κοινὸν ἀνελευθερία συναμφότερα δὲ ἐλευθεριότητι, καὶ κατάπληξιν ἀναισχυντίᾳ ὧν κοινὸν ἀναίδεια συναμφότερα δὲ αἰδοῖ, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἀρετῶν τε καὶ ἀστείων ἕξεων τὸ ἀνάλογον τηροῦσιν ἡμῖν ἀναφανήσεται, καθάπερ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ ἀνίσου σχέσεως δειχθήσεται μειζονότης ἐλαττονότητι ὧν κοινὸν ἀνισότης <συναμφότερα δὲ> τῇ ἰσότητι.

τοῦ δὴ οὖν τελείου διὰ τὸ τοιοῦτον ἡ σπανιότης, ὥσπερ ἀγαθοῦ τινος καὶ οὐχὶ πολύχου ὄντος κακοῦ, ἕνα μὲν ἐν μονάσιν ἡμῖν μόνον, τουτέστιν ἐντὸς δεκάδος, ἕνα δὲ μόνον ἐν δεκάσι, τουτέστι πρὸ τοῦ εἰς *** ἑκατοντάσιν, καὶ ἕνα μόνον ἐν χιλιάσι παρέξει φυσικῷ νόμῳ. καὶ εἰ τύχοι ἐν πρώτῳ βαθμῷ μυριάδων ὁμοίως μόνον ἕνα, καὶ ἐν δευτέρῳ πάλιν ἕνα, καὶ τὸ τοιοῦτον ἐπ' ἄπειρον. ὑπόδειγμα δὲ τούτου ὁ ϛʹ καὶ ὁ κηʹ <καὶ ὁ> υϟϛʹ καὶ ὁ ηρκηʹ καὶ οἱ ὅμοιοι παρὰ μέρος εἰς ἑξάδα καὶ ὀγδοάδα καταλήγοντες.

γενέσεως δὲ ἔφοδος καὶ αὕτη συστατικὴ τῆς φιλαλληλίας τῶν τοῦ ἀριθμοῦ εἰδῶν καὶ μετὰ συμπνοίας ἀιδιότητος. τοὺς γὰρ ἀπὸ **[34]** μονάδος ἀνάλογον διπλασίους, ὅπερ ἐστὶν ἀρτιάκις ἀρτίους, ἐπισωρεύειν δεῖ καθ' ἕνα ἕκαστον ἀεὶ καὶ κατὰ ἑκάστου ἀριθμοῦ σωρείαν ἐπισκοπεῖν.

εἰ πρῶτος καὶ ἀσύνθετος ἐκ τῆς ἐπισωρείας γένοιτο, πολυπλασιάσωμεν τὸν γενόμενον τῷ ἐν τῇ συνθέσει ὑστάτῳ ληφθέντι· ὁ γὰρ ἀποτελεσθεὶς τέλειος ἐκ παντὸς ἔσται·[16]

εἰ δὲ δεύτερος καὶ σύνθετος, παραλείπωμεν αὐτόν, ἄλλον δὲ τὸν ἑξῆς ἀνάλογον ἐπισωρεύσωμεν, εἰ πρῶτος καὶ ἀσύνθετος ὁ γενόμενος· ἐὰν γὰρ τῷ προσεπισωρευθέντι πολυπλασιαστέον αὐτόν, καὶ οὕτως ὁ τῇ τάξει συνεχὴς τέλειος ἀναφανήσεται. καὶ οὕτως μέχρι παντός.

[16] Euklid, Elemente IX, 36

ebenso stehe die Verschlagenheit der Einfalt gegenüber, denen gemeinsam die Unvernunft sei, während sie beide zusammen der Klugheit gegenüberstehen; so auch Verschwendung und Habsucht mit dem gemeinsamen Zug der unfreien Art und dem gemeinsamen Gegensatz zur rechten Art eines Freien, und wiederum Befangenheit und Unverschämtheit mit der ihnen gemeinsamen Schamlosigkeit und dem gemeinsamen Gegensatz des Ehrgefühls.Und wenn wir sorgsam darauf achten, wird sich uns auch bei den übrigen Tugenden und gutbürgerlichem Verhalten dasselbe Verhältnis offenbaren, wie sich auch beim Zustand des Ungleichen das Größersein als Gegenstück zum Kleinersein herausstellen wird, denen gemeinsam die Ungleichheit ist, <während sie beide zusammen der> Gleichheit gegenüberstehen.

Das Vollkommene also nun gibt es wegen dieser Eigenschaft nur selten, weil es etwas Gutes ist und nicht ein Übel, das ja weit verbreitet ist, und es bietet uns nach dem Naturgesetz nur eine einzige vollkommene Zahl bei den Einerzahlen (das heißt innerhalb der Zahlenreihe von eins bis zehn), eine nur unter den Zehnern (das heißt vor dem Erreichen der Hunderter), und nur eine einzige in den Tausendern. Und vielleicht findet sich auch auf der ersten Stufe der Zehntausender in gleicher Weise nur eine solche Zahl, auf der zweiten <von 10000 bis 100000> wiederum eine, und in dieser Art weiter ins Unendliche. Beleg dafür sind die 6, die 28, die Zahlen 496 und 8128 und die ähnlichen Zahlen, die abwechselnd auf sechs und acht ausgehen.

Der Weg zu ihrer Entstehung aber ist auch hier die Herstellung der gegenseitigen Zuneigung der Zahlenarten und ihrer Ewigkeit, gepaart mit Übereinstimmung. Man muss nämlich von **[34]** der Eins an analog immer die doppelten Zahlen (das heißt die gerademal geraden) anhäufen, immer eine nach der anderen, muss sie nun addieren, und zwar immer jeweils eine, und muss auf die Summation jeder Zahl achten.

Sollte bei der Addition eine Primzahl und nicht zusammengesetzte Zahl herauskommen, multiplizieren wir sie mit dem Wert der letzten in der Summe hinzugenommenen Zahl; denn das Resultat wird grundsätzlich eine vollkommene Zahl sein.

Kommt aber eine sekundäre und zusammengesetzte Zahl heraus <1 + 2 + 4 + 8 = 15>, würden wir sie lassen, aber eine andere, die nächstfolgende Zahl in der Reihe <16> hinzuzählen, wenn unser Resultat eine Primzahl und nicht zusammengesetzte Zahl sein soll <15 + 16 = 31>; wenn man diese nämlich mit der zuaddierten Zahl multiplizieren muss <16 · 31>, wird auch so die in der Reihe zunächstkommende vollendete Zahl erscheinen <496>. Und so durchgehend.

διὰ μὲν οὖν τῆς τῶν ἀρτιάκις ἀρτίων συνθέσεως ἡ τοῦ ἀρτίου φύσις, διὰ δὲ τῆς ἐξ αὐτῶν περισσογονίας, μάλιστα δὲ τῶν πρώτων καὶ ἀσυνθέτων ἀποτελέσεως, ἡ τοῦ περισσοῦ παρεμφαίνεται.

οὐ χρὴ δὲ ξενίζεσθαι εἰ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ποικίλα τινὰ ἐπικατηγορεῖται, οἷον φέρ' εἰπεῖν αὐτῷ τούτῳ τῷ ϛʹ τὸ τέλειον εἶναι αὐτὸν καὶ τὸ πρῶτον ἀρτιοπέρισσον καὶ πάλιν πρῶτον ἑτερομήκη καὶ πρὸς τῶν Πυθαγορικῶν ἔτι γάμον καλεῖσθαι, ὅτι κατ' αὐτὸ πρώτιστον σύνοδος ἄρσενος καὶ θήλεος ἐκ κατακράσεως γίνεται· καὶ γὰρ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγίειαν τὸν αὐτὸν καλοῦσι καὶ ἔτι κάλλος διὰ τὴν ἐν αὐτῷ τῶν μερῶν ὁλοκληρίαν καὶ συμμετρίαν.

παρακηκόασι δὲ οἱ καὶ φιλίαν τὸν αὐτὸν νομίζοντες αὐτοὺς λέγειν διὰ τὴν τῶν διαφερόντων σύνοδον ἐν αὐτῷ καὶ φίλωσιν·ἄλλους γάρ **[35]** τινας ἄντικρυς φίλους ἀριθμοὺς καλοῦσιν ἐν τῷ προσοικειοῦν τάς τε ἀρετὰς καὶ τὰς ἀστείας ἕξεις τοῖς ἀριθμοῖς, οἷον τὸν σπδʹ καὶ τὸν σκʹ· γεννητικὰ γὰρ ἀλλήλων τὰ ἑκατέρου αὐτῶν μέρη κατὰ τὸν τῆς φιλίας λόγον, ὡς Πυθαγόρας ἀπεφήνατο· ἐρομένου γάρ τινος 'τί ἐστι φίλος' εἶπεν· 'ἕτερος ἐγώ', — ὅπερ ἐπὶ τούτων τῶν ἀριθμῶν δείκνυται. ἀλλ' ἐπεὶ κατ' οἰκεῖον τόπον διελοῦμεν τὰ ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων εἰς τὴν τοιαύτην θεωρίαν πάνυ ἀνθηροτάτην καὶ γλαφυρὰν οὖσαν ἀναφερόμενα, χωρητέον ἐπὶ τὰ ἑξῆς.

᾿Ακόλουθον γὰρ τούτοις διαλαβεῖν περὶ τοῦ μηκέτι καθ' αὑτὸ ἀλλ' ἤδη πρός τι ποσοῦ, οὐκ ἐπειδὴ πᾶσα ἡ περὶ τοῦ καθ' αὑτὸ τεχνολογία πέρας ἔχει (πῶς γὰρ ὅπου μήτε περὶ ἐπιπέδων παμποικίλων ὄντων μήτε περὶ στερεῶν διειλάμεθα;), ἀλλ' ὅτι μάλιστα εἰς τὴν ἐκείνων παρακολούθησιν συνεργοῦσιν οὗτοι.

Durch die Zusammenstellung nun der gerademal geraden Zahlen zeigt sich die Natur des Geraden, durch die Entstehung des Ungeraden aber aus ihnen, besonders aber durch die Herstellung der Primzahlen und nicht zusammengesetzten Zahlen, offenbart sich zusätzlich das Wesen des Ungeraden.

Man darf sich jedoch nicht davon befremden lassen, wenn über die gleiche Zahl gewisse verschiedenartige Aussagen gemacht werden, indem zum Beispiel gerade der 6 die Eigenschaft der Vollkommenheit zugeschrieben wird und dass sie die erste geradeungerade Zahl ist <2 · 3 = 6> und dass sie wiederum die erste Rechteckzahl ist und bei den Pythagoreern auch noch "Hochzeit" heißt, weil entsprechend dieser Eigenschaft zuallererst ein Zusammentreffen von Männlichem und Weiblichem infolge von Vermischung entsteht. Denn aus demselben Grund nennen sie die Sechs auch "Gesundheit" und auch noch "Schönheit" wegen der Vollständigkeit und Symmetrie ihrer Teile.

Diejenigen aber, die glauben, die Pythagoreer würden dieselbe Zahl <6> auch "Freundschaft" und "Anfreundung" nennen wegen des Zusammentreffens des Verschiedenen in ihr, diese haben sich verhört; die Pythagoreer nennen nämlich im Gegensatz dazu gewisse gänzlich andere **[35]** Zahlen "befreundete Zahlen", indem sie die Tugenden und gut bürgerliches Verhalten den Zahlen zuschreiben; solche Zahlen sind zum Beispiel die 284 und die 220; bringen doch die Teile jeder einzelnen diese Zahlen wechselseitig gemäß dem Verhältnis der Freundschaft hervor, wie Pythagoras darlegte. Auf die Frage jemands nämlich „Was ist ein Freund?" sagte er: "Ein anderes Ich", was sich auch bei diesen Zahlen zeigt. Da wir jedoch erst zu gegebener Zeit die Beiträge der Pythagoreer zu dieser so blühenden und feinen Theorie auseinanderlegen werden, wollen wir zum Nächstfolgenden voranschreiten.

2. Über relative Quantität, das heißt Verhältnisse natürlicher Zahlen

Es folgt nämlich auf diesen Gegenstand die Untersuchung über die Quantität, die nicht mehr für sich allein besteht, sondern bereits im Hinblick auf etwas anderes, nicht etwa, weil die systematische Behandlung über die absolute Größe eine Grenze hätte (wie denn auch, da wir weder die höchst mannigfaltigen Ebenen noch die Körper behandelt haben), sondern weil diese Zahlen am besten zum Verständnis jener <gerade, ungerade Zahlen u.a.> beitragen.

καὶ γὰρ οὐδὲ τὸν περὶ τούτων συνεχῶς ἔχοντες ἀπαρτιοῦμεν λόγον, ἀλλὰ στοχαζόμενοι τῆς τοῦ εἰσαγομένου διὰ τὴν τάξιν εὐμαρείας τὸ πλέον αὐτοὺς μετ' ἐκείνους ποιησόμεθα, ὑπερθέντες ἃ παρὰ μέρος τὴν περὶ ἀναλογιῶν ἐξήγησιν. ὅπερ οὖν πρὸ βραχέος συντείνειν ἐφαίνετο πρὸς τὸν περὶ ἀρετῶν λόγον ἐν τῷ τῶν τελείων καὶ ἐναντίων διορισμῷ, τοῦτ' εὐθὺς ἐν ἀρχῇ τοῦ πρός τι ποσοῦ πάλιν ἡμῖν συνεμφαίνεται. τῶν γὰρ πρὸς ἄλλο πως θεωρουμένων ἀριθμῶν αἱ γενικώταται δύο σχέσεις εἰσὶν ἰσότης τε καὶ ἀνισότης, καὶ ἡ μὲν ἰσότης ὥσπερ μετριότης τις καὶ μεσότης **[36]** ἄσχετός ἐστιν οὔτ' ἄνεσιν οὔτ' ἐπίτασιν ἐπιδεχομένη, ἡ δὲ ἀνισότης κατὰ πρώτην τομὴν εἰς δύο σχίζεται εἴς τε τὸ μεῖζον καὶ τὸ ἔλαττον, ὥσπερ κἀπὶ τῶν ἀρετῶν τὸ ἀντίθετον εἰς ὑπερβολὴν καὶ ἔλλειψιν ἀντιδιεστέλλοντο ἡ κακία.

ἀντίκειται δὲ τὸ μεῖζον τῷ ἔλαττον καὶ συναμφότερα ἅμα τῷ ἴσῳ, οὔτε δὲ ἴσον ἄν τι εἴη ἄνευ τοῦ τινί, οὔτε μεῖζον ἢ ἔλαττον ἄνευ τινός, διόπερ εἰκότως πρός τι.

ἀλλὰ τῷ μὲν ἴσον ἀνθυπακούει τὸ αὐτὸ ὄνομα ὡς ἂν μεσότητι, ὅπερ καὶ ἐπ' ἄλλων τινῶν τοῦ πρός τι ὑποδειγμάτων δείκνυται ἐπί τε τοῦ ἀδελφὸς καὶ συστρατιώτης καὶ γείτων καὶ ἧλιξ καὶ ἄλλων ὁμοίων·

τῷ δὲ ἀνίσῳ κατὰ μὲν τὸ γενικὸν παραπλήσιόν τι συμβέβηκε κατὰ δὲ τὰ εἴδη οὐκέτι, ἀλλ' ἑτερώνυμος ἡ ἀνταπόκρισις γίνεται, καθάπερ ἐπ' ἄλλων, οἷον πατὴρ καὶ διδάσκαλος καὶ ἐρώμενος καὶ τῶν ὁμοίων.

ἴσον μὲν οὖν ἐστι ποσὸν ὃ ἀντεξεταζόμενον τῷ συζύγῳ οὔτε πλέον οὔτε ἔλαττόν τι ἔχει, ἄνισον δὲ ὃ καὶ αὐτὸ ἀντεξεταζόμενον τῷ συζύγῳ ἢ μεῖζόν ἐστι ἢ ἔλαττον· ἐν γὰρ τῇ συζυγίᾳ τὸ μέτρον πλέον τι μετὰ τὴν μίαν μέτρησιν ἐν τῷ μετρουμένῳ καταλείψει.

καὶ μεῖζον μέν ἐστιν ὃ πέφυκε μετρούμενον ὑπὸ θατέρου μετὰ μίαν προσβολὴν ἀκαταμέτρητον αὑτοῦ τι ἀπολιπεῖν ὁποσονοῦν, ἔλαττον δὲ μετρητικὸν ὂν τοῦ συζύγου, μιᾷ προσβολῇ περι**[37]**σχεῖν ὅλον οὐ δύναται.

Denn wir werden auch nicht einmal die Darlegung darüber im Zusammenhang ganz durchführen, sondern im Streben nach dem bequemen Zugang für die durch die Anordnung Eingeführten werden wir am besten diese Zahlen nach jenen anordnen, indem wir die außer der Reihe stehende Erläuterung über die Proportionen verschieben. Was sich nun kurz zuvor bei der Unterscheidung des Vollendeten von seinem Gegenteil auf die Darlegung der Tugenden zu beziehen schien, das zeigt sich uns sogleich ebenfalls wieder zu Beginn der Untersuchung über die Quantität im Verhältnis zu etwas. Wenn man nämlich Zahlen in irgendeinem Verhältnis zu etwas anderem betrachtet, sind die beiden allgemeinsten Relationen Gleichheit und Ungleichheit. Und die Gleichheit ist wie eine unbeeinflussbare Art von Maß und Mitte, **[36]** bei der es weder ein Nachlassen noch eine Anspannung gibt, während sich die Ungleichheit bei der ersten Zerlegung in zwei Teile spaltet, in das Größere und das Kleinere, so wie sich auch bei den Tugenden das Gegenteil, die Schlechtigkeit, in Übertreibung und Versäumnis nach zwei Richtungen auseinanderlegte.

Dem Geringeren aber steht das Größere, und beide zusammen stehen zugleich dem Gleichen gegenüber, doch gäbe es weder etwas Gleiches ohne etwas, dem es gleich ist, noch ein Größeres oder Kleineres ohne etwas im Verhältnis dazu, weshalb man mit Recht von "relativ" spricht.

Dem einen aber, dem "gleich", entspricht ganz dieselbe Bezeichnung wie bei der Mitte, was sich auch bei einigen anderen Beispielen für das Verhältnis zu etwas zeigt, etwa beim Bruder, beim Kameraden, Nachbarn, Altersgenossen und anderen dieser Art.

Mit dem Ungleichen aber geschieht generell etwas ähnliches, jedoch nicht mehr in den einzelnen Arten, sondern die gegensätzliche Entsprechung bekommt einen anderen Namen, wie auch bei anderen Verhältnissen, wie etwa Vater und Lehrer und Geliebter und bei ähnlichem.

Gleich also ist nun eine Quantität, die, wenn man sie gegen etwas mit ihr Verbundenes hält, weder ein Mehr noch ein Weniger hat; ungleich aber ist etwas, das, ebenfalls gegen etwas darauf Bezogenes gehalten, entweder größer ist oder kleiner. Beim Vergleich nämlich wird das Messende nach der einen Messung etwas mehr im Gemessenen übrig lassen.

Und größer ist das, was von Natur aus so beschaffen ist, dass es, vom anderen gemessen, nach einer Messoperation eine irgendwie bemessene Menge von sich übrig lässt, die dieses nicht messen konnte. Kleiner aber ist das, was das im Verhältnis Stehende misst, es aber mit einer Messoperation **[37]** nicht ganz zu umfassen vermag.

καθ' ὑποδιαίρεσιν δὲ τὰ δύο ταῦτα τοῦ ἀνίσου εἴδη ἀνὰ πέντε σχέσεις ἀποτελεῖ, συναμφότερα δὲ ὁμοῦ δέκα· τοῦ τε γὰρ μείζονος τὸ μέν ἐστι πολλαπλάσιον τὸ δὲ ἐπιμόριον τὸ δὲ ἐπιμερές, δύο δὲ τὰ λοιπά, μιγέντος τοῦ πολλαπλασίου πρὸς ἑκάτερον τῶν λοιπῶν, πολλαπλασιεπιμόριον καὶ πολλαπλασιεπιμερές·

τοῦ δὲ ἐλάττονος κατὰ ἀντιπεπόνθησιν μετὰ τῆς ὑπό προθέσεως τὸ μέν ἐστιν ὑποπολλαπλάσιον τὸ δὲ ὑποεπιμόριον τὸ δὲ ὑποεπιμερές, δύο δὲ τὰ λοιπά, καθὰ καὶ ἐπὶ τοῦ προτέρου εἴδους μικτὰ ἔκ τε τοῦ πολλαπλασίου καὶ ἑκατέρου τῶν λοιπῶν, ὑποπολλαπλασιεπιμόριόν τε καὶ ὑποπολλαπλασιεπιμερές.

ἐφοδιάζει δὲ ἡμᾶς ἡ πρόθεσις ἐν τοῖς ὀνόμασι προλόγους μὲν ὡς ἂν φύσει καὶ τιμιότητι πρώτους, καθάπερ δειχθήσεται, τοὺς προτέρους εἰδέναι, ὑπολόγους δὲ καὶ τὰ ἐναντία ἔχοντας τοὺς δευτέρους τοὺς δυομένους.

εἰ δέ τις λέγοι τὴν ἰσότητα σχέσιν μὴ εἶναι διὰ τὸ τοὺς κατ' αὐτὴν ὅρους ἀδιαστάτους καὶ ἀδιαφόρους ὑπάρχειν, ὑπομνηστέον ὅτι σχέσις ἕτερόν τι διαστήματός ἐστιν· ἰδοὺ γὰρ ἐν τῷ τυχόντι ἀνισότητος ὑποδείγματι δυεῖν ὅρων διάστημα μὲν ταὐτὸ κἂν ἀναστρέφωνται, ἀναστρεφομένων δ' ὅμως λόγος πάντως ἕτερος, τουτέστι σχέσις, ὥστ' οὐδὲν κωλύει τοὺς ἐν ἰσότητι ὅρους διαφορὰν μὲν μὴ ἔχειν ἀδιαστάτους ὄντας, σχέσιν δὲ πάντως, ἢ οὐκ ἔσται τῶν πρός τι τὸ ἴσον, ὅπερ ἀμήχανον.

In weiterer Unterteilung ergeben aber diese beiden Arten des Ungleichen jeweils fünf Relationen, beide zusammen aber zehn. Vom Größeren nämlich ist das eine das Vielfache, das andere das Superpartikulare <Überteilige, ein Ganzes und ein Bruchteil mit 1 im Zähler, z.B. $1 + \frac{1}{x}$>, das dritte das Superpartiente <Überteilende, ein Ganzes und ein Bruch mit 2, 3 usw. im Zähler, z.B. $1 + \frac{2}{x}$ oder $1 + \frac{3}{x}$ usw.>; die beiden übrigen Teile aber, bei denen das Vielfache mit jeder der beiden Unterabteilungen gemischt ist, sind das Vielfache mit Stammbruch <multiples Superpartikulares> und das Vielfache mit abgeleitetem Bruch <multiples Superpartientes>.

Vom Kleineren aber ist im reziproken Verhältnis mit der Präposition "unter" der erste Teil das Untervielfache <Submultiples>; dann kommt das Untersuperpartikulare <Subsuperparticulares>, dann das Untersuperpartiente <Subsuperpartientes>, und die beiden übrigen Teile sind, genau wie auch bei der ersten Art, gemischt aus dem Vielfachen und jeder der beiden Unterabteilungen, nämlich das Untervielfache mit Stammbruch <submultiples Superpartikulares> und das Untervielfache mit abgeleitetem Bruch <submultiples Superpartientes>.

Die Präposition aber an den Bezeichnungen gibt uns die Möglichkeit, die Vorderglieder <der Verhältnisse> als die von Natur und Wert höchsten (wie wir beweisen werden) zu erkennen, die Hinterglieder aber, die das Gegenteil bilden, als die Zweitrangigen, <in den ersten> Aufgehobenen.

Sollte aber jemand behaupten, die Gleichheit sei keine Relation, weil die ihr entsprechenden Terme ohne Abstand und unterschiedslos sind, so ist daran zu erinnern, dass eine Relation etwas anderes ist als ein Abstand. Man sehe nämlich nur: Wenn man bei einem beliebigen Beispiel für Ungleichheit den Abstand der beiden Terme <z.B. 5 : 3> mit den gleichen Werten umdreht <z.B. 3 : 5>, so ergibt sich doch ein völlig anderes Verhältnis, und das eben ist eine Relation, so dass nichts im Weg steht, dass die Terme bei Gleichheit zwar keinen Unterschied aufweisen, weil sie keinen Abstand haben, sehr wohl aber eine Relation besitzen. Sonst könnte ja das Gleiche nicht in die Kategorie "im Verhältnis zu etwas" gehören, und dies ist nicht möglich.

Πολλαπλάσιον μὲν οὖν ἐστι τοῦ μείζονος τὸ πρῶτον εἶδος, ὅταν δυεῖν ὅρων ὁ ἕτερος τὸν ἕτερον πλεο**[38]**νάκις ἢ ἅπαξ καταμετρῇ πληρούντως. ἄρξεται δὲ ἀπὸ τοῦ δίς, ἵνα παρὰ τοῦτο ὀνομάζωνται ὁ μὲν μετρούμενος διπλάσιος ὁ δὲ μετρῶν ὑποδιπλάσιός τε καὶ ἥμισυς συνωνύμως, ὥσπερ ἀμέλει καὶ αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον γένος ὑποπολλαπλάσιόν τε λέγεται συνωνύμως καὶ ψιλῶς μέρος· ἐὰν δὲ τρίς, ὁ μὲν μείζων τριπλάσιος ὁ δὲ ἐλάττων ὑποτριπλάσιός τε καὶ τρίτον καὶ τἆλλα κατὰ τὸ ἑξῆς εἴδη.

ὑπόδειγμα δὲ πάντων εὐτάκτων πολυπλασίων σαφὲς ἕξομεν ἐὰν ἐκθέμενοι τὸν ἀπὸ μονάδος συνεχῆ ἀριθμὸν ἤτοι πρὸς αὐτὴν τὴν μονάδα συγκρίνωμεν τοὺς μετ' αὐτὴν καθ' ἕκαστον ἑξῆς, ἢ πρὸς τὴν μετ' αὐτὴν δυάδα τοὺς μετ' ἐκείνην παρ' ἕνα καθ' ἕκαστον ὁμοίως ἑξῆς, πρὸς τριάδα τοὺς παρὰ δύο, ἢ πρὸς τετράδα τοὺς παρὰ τρεῖς καὶ ἐπ' ἄπειρον, συμπροκοπτόντων τῇ τοῦ ἀριθμοῦ ἐφοσονοῦν ἐκθέσει.

ἐὰν δὲ κατὰ παραλλήλους στίχους καταγράψωμεν ἅπαντα τὰ τοῦ πολυπλασίου εἴδη ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενα, προσεκθέμενοι τὸν ἐφεξῆς ἀριθμὸν καὶ πρὸς αὐτὸν γεννήσαντες ἐπὶ βάθος τὴν πολλαπλασιότητα, ἐνοψόμεθα πολλά τε ἄλλα τερπνὰ ἐπακολουθήματα καὶ γλαφυρίαν ποικίλην καὶ εὔτακτον δὲ γένεσιν ἀντιπαρωνυμίας ἐπιμορίων παντοίων πρὸς πολλαπλασίους παντοίους καθ' ὁμογένειαν καὶ ἔτι ἐπιμερῶν καὶ εἴ τις ἐπισκέπτοιτο καὶ μικτῶν, καὶ ὅλοι ὅλων στίχοι μιᾷ καὶ ἀπαραλλάκτῳ σχέσει εὐτάκτως προκοπτούσῃ ὁμολόγως φανήσονται ἔν τε πλάτει καὶ βάθει.

ἔτι μὴν καὶ ἐπιμορίων πυθμένες μὲν ἑνὶ στίχῳ ἐπὶ βάθος εὑρεθήσονται, δεύτεροι δὲ ἀπὸ πυθμένος ἐν τῷ ἑξῆς, **[39]** τρίτοι δὲ καὶ τέταρτοι κατὰ τὴν πρὸς τούτους ἀντακολουθίαν διαφορὰς ἔχοντες τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀριθμούς.

Vielfache und Quadratzahlen

Ein Vielfaches nun ist die erste Form des Größeren, wenn einer von zwei Termen den anderen öfter **[38]** als einmal vollständig <ohne Rest> misst. Anfangen wird es aber mit dem Zweifachen, damit nach diesem der gemessene <Term> "zweifach" genannt wird, der messende <Term> aber "unterzweifach" und, gleichbedeutend, "halb", wie natürlich auch die restliche Gattung gleichbedeutend "untervielfach" und einfach "Teil" genannt wird. Ist aber der gemessene <Term> dreimal so groß, wird der größere <Term> "dreifach" genannt, der kleinere aber "unterdreifach" und "Drittel", und so geht es weiter durch alle folgenden Formen.

Einen deutlichen Beleg für alle wohlgeordneten Vielfachen werden wir bekommen, wenn wir die der Eins unmittelbar folgende Zahl herausnehmen oder mit der Eins selbst alle ihr der Reihe nach jeweils folgenden Zahlen vergleichen oder mit der nach der Eins kommenden Zwei alle Zahlen nach dieser alternierend in gleicher Weise der Reihe nach, mit der Drei jede dritte Zahl oder mit der Vier jede vierte Zahl und so weiter ins Unendliche, wobei der Abstand der verglichenen Zahlen im gleichen Schritt mit der herausgenommenen Zahl vorausschreitet.

Wenn wir aber in parallelen Reihen alle die Formen des Vielfachen hinschreiben, indem wir mit der Eins beginnen, dann jeweils die folgende Zahl herausgreifen <2,3,4,5 usw.> und zu ihr jeweils das Vielfache erzeugen und nach unten hinschreiben, dann werden wir viele andere erfreuliche Zusammenhänge sehen, auch vielfache Klarheit und die wohlgeordnete Entstehung der korrespondierenden Bezeichnung verschiedener Superpartikularer im

Verhältnis zu verschiedenen Vielfachen entsprechend der gleichen Art und dazu noch die Entstehung der Bezeichnung von Superpartienten und, wenn jemand darauf achten wollte, auch der gemischten <Arten>; und alle Zeilen aller dieser Reihen werden einer einzigen unveränderten und wohlgeordnet voranschreitenden Relation entsprechend nach rechts hin und nach unten erscheinen.

Auch wird man noch die Grundformen der Superpartikularen in einer Zeile nach unten gehend finden, die zweiten Formen nach der Grundform in der folgenden Reihe, **[39]** dann die dritten und vierten, die entsprechend der Gegenfolge zu diesen als Differenz die Zahlen von der Eins an in Reihe haben.

ἐὰν δὲ καὶ τὰς μὲν ἐπὶ πλάτος μονάδας ἀφέλωμεν, ὡς ἂν μηδὲν ποικίλον ἐχούσας, τὸν δὲ συνεχῆ ἀριθμὸν ἀντ' αὐτῶν προτάξωμεν ὑπὸ τῆς αὐτῆς μονάδος, γλαφυρίαν τινὰ ἐνοψόμεθα καὶ σπερματικῶς ὑποφαινόμενον τὸν λόγον τῆς τῶν μαντικῶν πλινθιδίων ἐφόδου, ὃς ἐν τοῖς ἐπανθήμασι τῆς ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς παραδίδοται.

καὶ εἰ μέχρι δεκάδος εἴη ἡ ἔκθεσις τῶν πολλαπλασίων, ἐπί τε μῆκος καὶ πλάτος γενήσονται μονάδες ἐγγώνιοι αἱ μὲν ἄκραι ἅπαξ ἡ δὲ μέση δίς, ὅπως καὶ ἐνταῦθα ἀποσῴζηται τὸ τῆς ἀναλογίας ἴδιον· ἴσον γὰρ ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, καὶ σημείου μὲν λόγον ἕξει ἡ ἑτέρα τῶν ἄκρων μονὰς ἡ δὲ ἑτέρα τετραγώνου ἡ δὲ μέση πλευρᾶς.

καὶ ὁστισοῦν τῶν ἐν τῷ διαγράμματι ληφθείη, ἥμισυς ἔσται δύο τῶν ἑκατέρωθεν αὐτοῦ ἐπί τε μῆκος καὶ πλάτος. διαγωνίως δὲ εἰ λαμβάνοιντο, πῇ μὲν ἔσται μονάδι ἐλάττων ἥμισυς ὁ μέσος, πῇ δὲ μονάδι μείζων.

ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τῆς ἐν ἀρχῇ γωνίας, τουτέστι τῆς μονάδος, εἰς τὴν ἐν τέλει ἡ διαγώνιος ἔσται μόνων τετραγώνων, ἑκάστου παρασπιζομένου ὑπὸ δύο ἑτερομηκῶν κατά τε μῆκος καὶ πλάτος, ὡς κἀνταῦθα σῴζεσθαι τὸ καθολικὸν ἐκεῖνο τὸ ἐκ δύο συνεχῶν ἑτερομηκῶν καὶ δὶς τοῦ μέσου αὐτῶν ἀνάλογον τετραγώνου γεννᾶσθαι πάντως τετράγωνον, καὶ ἀνάπαλιν ἐκ δύο τετραγώνων καὶ δὶς τοῦ μέσου αὐτῶν ἀνάλογον ἑτερομήκους ὁμοίως τετράγωνον, καὶ τῇδε μὲν περισ**[40]**σούς, τῇδε δὲ ἀρτίους.

Wenn wir aber auch die Einserzahlen nach rechts hin wegnehmen, da sie ja nichts Auffallendes an sich haben, dafür aber an ihre Stelle die unmittelbar unter dieser Einserzahl stehende Zahl setzen, werden wir eine wunderbare Klarheit und keimartig das Verfahren des Zugangs zu den seherischen Ziegeln <soliden Zahlen der Form $n \cdot n \cdot (n - 1)$ > erscheinen sehen, das in den "Blüten"-Methoden der Einführung in die Arithmetik überliefert ist.

Und wenn die Reihe der Vielfachen bis zur Zehn geht, werden nach unten und rechts die Einerzahlen im rechten Winkel dastehen, und zwar an den Außenrändern einmal; die mittlere Zahl aber bildet jeweils das Doppelte, damit auch hier die Eigenheit der Proportion gewahrt bleibt <die innere Reihe, in Form eines rechten Winkels, ist 4 - 20 nach rechts und 4 - 20 nach unten, mit 4 als Scheitelpunkt; die Zahlen sind stets das Doppelte der Zahlen links bzw. über ihnen, z.B. 4 von 2, 6 von 3, 12 von 6 usw.>. Denn es wird das Produkt der Randzahlen dem Wert der in Richtung Mitte hin stehenden Zahl <mit sich selbst> gleich sein <$2 \cdot 2 = 4$; $3 \cdot 3 = 9$; $4 \cdot 4 = 16$>; und die eine Einerzahl von den Eckzahlen wird die Bedeutung eines Punktes besitzen, die andere aber <100> wird ein Quadrat bedeuten und die mittlere <10> eine Quadratwurzel.

Und jede beliebige Zahl, die man in der Tabelle nimmt, wird die Hälfte der beiden Zahlen links und rechts von ihr sein, und zwar in die Länge und in die Breite. Nimmt man sie aber diagonal, wird die Zahl in der Mitte einerseits um eins kleiner sein als die Hälfte <in der fallenden Diagonalen>, auf der anderen Seite aber um eines größer <in der steigenden Diagonalen>.

Aber auch vom Winkel am Anfang <der Tabelle, links oben> an, das heißt von der Eins aus bis zum Winkel am Ende <der Tabelle, rechts unten>, besteht die Diagonale nur aus Quadratzahlen, von denen jede waagerecht und senkrecht flankiert ist von zwei Rechteckzahlen <$n (n + 1)$>, damit auch hier jener allgemeine Satz eingehalten wird, dass die Summe zweier einander folgender Rechteckzahlen und zweimal der entsprechenden Quadratzahl in ihrer Mitte grundsätzlich eine Quadratzahl ergibt und wiederum, dass sich als Summe von zwei Quadratzahlen und zweimal der entsprechenden Rechteckzahl in ihrer Mitte ebenso eine Quadratzahl ergibt, und zwar sind es hier **[40]** ungerade Zahlen, dort aber gerade.

ἀλλὰ τὸ μὲν ἀρτίους φύεσθαι καὶ νῦν συμβαίνει διὰ τὸ τοὺς παρασπιζομένους τετραγώνους εἶναι μόνους παρ' ἕνα, φύσει περισσοὺς ὄντας καὶ ἀρτίους, καὶ τοὺς δορυφοροῦντας ἑτερομήκεις ἀεὶ ἀρτίους, εἴτε δὲ ἄρτιος εἴη ὁ μέσος εἴτε περισσός, δὶς λαμβανόμενος ἄρτιον ποιεῖ·

τὸ δὲ περισσοὺς γίνεσθαι οὐκέτι, ἐπεὶ οὐ παρασπίζονται ἑτερομήκεις ὑπὸ τετραγώνων· ἅπαξ γὰρ λαμβανομένων τῶν ἄκρων, ἐν οἷς πάντως ἐστὶ περισσός, διέμεινεν ἡ περισσότης. καὶ ἐφ' ἑκάστου δὲ τετραγώνου ἐφ' ἑκάτερα γαμμοειδῶς πάλιν εὔτακτοι αἱ σχέσεις θεωροῦνται ἀπ' ἀρχῆς, τουτέστιν ἀπὸ διπλασίου.

εἰ δὲ καὶ τοὺς ἑτερομήκεις γαμμοειδῶς παρασπίζοιμεν τοῖς τετραγώνοις ἅπαξ τοὺς ἄκρους συντιθέντες καὶ δὶς τὸν μέσον, ποιήσομεν οὓς ἐλέγομεν ἐνταῦθα παραλείπεσθαι τετραγώνους περισσούς.

διαφορὰν δὲ ἕξουσι πρὸς ἀλλήλους οἱ διαγώνιοι ἀριθμοὶ τῇδε μὲν ἀπὸ τριάδος περισσοὺς ἀπ' ἀρχῆς εἰς τέλος, τῇδε δὲ ἀπὸ δυάδος ἀρτίους ἀπὸ μέσων ἐπὶ πέρατα, συζυγούντων κατ' ἰσότητα τῶν ἑκατέρωθεν εὐτάκτων.

Ἐπιμόριος δὲ γίνεται λόγος, ὅταν τῶν συγκρινομένων ὅρων ὁ μείζων ἔχῃ τὸν λοιπὸν καὶ ἔτι ἓν αὐτοῦ μόριον γενικῶς· εἰδικῶς δὲ ἐὰν μὲν ἥμισυ ᾖ τὸ μόριον ἡμιόλιος ἐὰν δὲ τρίτον ἐπίτριτος ἐὰν δὲ τέταρτον ἐπιτέταρτος καὶ ἑξῆς ἀκολούθως ἀεί, προλόγων μὲν γιγνομένων τῶν μειζόνων ὅρων πρὸς τοὺς ἐλάττονας, ἀνάπαλιν δ' ὑπολόγων τῶν ἐλαττόνων πρὸς τοὺς μείζονας, **[41]** τὴν ὀνομασίαν ἰσχόντων καὶ τούτων ἀεὶ μετὰ τῆς ὑπό προθέσεως.

Dass dabei aber die ersten Summen gerade werden, kommt auch hier davon, dass die flankierten Zahlen abwechselnd nur Quadratzahlen sind, die von Natur ungerade und gerade sind, und dass die flankierenden Rechteckzahlen stets gerade sind, und mag die mittlere <Zahl> gerade sein oder ungerade, zweimal genommen ergibt sie immer eine gerade Zahl.

Dass aber keine ungeraden Zahlen mehr herauskommen, rührt davon her, dass keine Rechteckzahlen von Quadratzahlen flankiert werden; nimmt man nämlich die Außenzahlen, unter denen grundsätzlich eine ungerade Zahl ist, einfach, bleibt das Ungerade erhalten. Und bei jeder Quadratzahl erkennt man, in Form eines Gamma nach beiden Seiten hin gehend, wiederum von Anfang (das heißt vom Zweifachen) an die schöne Ordnung der Relationen.

Wenn wir aber auch die Rechteckzahlen in Gammaform mit den Quadratzahlen flankieren, indem wir die Außenzahlen einmal nehmen und die mittlere Zahl doppelt genommen dazu addieren, werden wir als Summe die ungeraden Quadratzahlen erhalten, die wie wir sagten, hier herauskommen müssen.

Die diagonalen Zahlen werden aber voneinander so unterschieden sein, dass einerseits von der Drei an ungerade Zahlen vom Anfang bis zum Ende auftreten, andererseits von der Zwei an gerade Zahlen von den mittleren Zahlen bis zur Tabellengrenze, wobei die Zahlen auf beiden Seiten durch ihre Gleichheit eine schöne Ordnung aufweisen.

Überteilige Verhältnisse

Superpartikular wird ein Verhältnis, wenn von den verglichenen Termen der größere den kleineren <ganz> und dazu noch einen Teil davon enthält. Speziell aber ist es, wenn der Teil gerade die Hälfte ausmacht, Eineinhalb, wenn es der dritte Teil ist, Eineindrittel, wenn es der vierte Teil ist, Einundeinviertel, und so immer weiter der Reihe nach, wobei Vorderglieder die größeren Terme im Verhältnis zu den kleineren bilden, und andererseits die Hinterglieder die kleineren Terme im Verhältnis zu den größeren sind, **[41]** wobei auch diese ihre Bezeichnung stets mit der Präposition "unter-" erhalten.

ὑπόδειγμα δ' αὐτῶν ἡμιολίου μὲν ἐὰν ἐκτεθέντος τοῦ συνεχοῦς ἀριθμοῦ ἐκλέξωμεν τοὺς ἀπὸ δυάδος ἀρτίους καὶ συγκρίνωμεν τῷ μὲν πρώτῳ τὸν παρ' οὐδὲν τῷ δὲ ἑξῆς τὸν παρ' ἕνα τῷ δὲ τρίτῳ τὸν παρὰ δύο καὶ <τῷ> τετάρτῳ τὸν παρὰ τρεῖς καὶ ἐφεξῆς ἀκολούθως· ἐπιτρίτου δὲ ὅταν τοὺς ἀπὸ τριάδος τριάδι διαφέροντας ἐκλέξαντες συγκρίνωμεν αὐτοῖς τῷ μὲν πρώτῳ τὸν παρ' οὐδὲν τῷ δὲ δευτέρῳ τὸν παρ' ἕνα τῷ δὲ τρίτῳ τὸν παρὰ δύο τῷ δὲ τετάρτῳ τὸν παρὰ τρεῖς καὶ ἑξῆς ἀκολούθως τοῖς προτέροις.

ἐπιτετάρτου δ' ἕξομεν ὑπόδειγμα, ἐὰν τοὺς ἀπὸ τετράδος τετράδι διαφέροντας ἐκλέξαντες πάλιν συγκρίνωμεν αὐτοῖς τῷ μὲν πρώτῳ τὸν παρ' οὐδὲν τῷ δὲ δευτέρῳ τὸν παρ' ἕνα καὶ τῷ τρίτῳ τὸν παρὰ δύο καὶ ἀεὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις.

καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δὲ τοῦ ἐπιμορίου εἰδῶν τὸ ἀνάλογον ποιήσομεν, κατ' αὐτὸ τὸ τοῦ μορίου ὄνομα λαμβάνοντες ἀριθμοὺς τοὺς πρώτους δυναμένους ἀφ' ἑαυτῶν παρασχεῖν τὸ μόριον, καθ' ὃ ἐπιμόριοι αὐτῶν ἔσονται οἱ συγκρινόμενοι, οἵπερ καὶ μονάδι αὐτῶν διοίσουσι καὶ πυθμένες τῶν λόγων γενήσονται. ἡ δὲ τοῦ μορίου κλῆσις κατὰ τὸν ἐλάττονα λόγον ἀεὶ θεωρουμένη, μονάδι μεγαλωνυμωτέρα ἔσται κατὰ τὸν μείζονα. οὐκ ἔσται δὲ κατὰ τοὺς μείζονας ὅρους ἡ τοῦ μορίου ἐξέτασις, διότι οὐθεὶς τῶν πυθμενικῶν φανήσεται ἔχων ἐκεῖνο τὸ μόριον, καθ' ὃ ἐπιμόριος ἕκαστος αὐτῶν ἐστι τοῦ συγκρινομένου ἐλάττονος, κατὰ δὲ τοὺς πυθμένας αὔξονται οἱ λόγοι.

Als Beispiel dafür und für das Eineinhalbfache soll es dabei dienen, wenn wir in der ununterbrochenen Zahlenreihe die von der Zwei an folgenden geraden Zahlen herausgreifen und mit der ersten <2> die unmittelbar folgende Zahl <3> vergleichen <2 : 3>, mit der folgenden <geraden Zahl 4> aber die übernächste Zahl <6; also 4 : 6>, mit der dritten <6> aber die Zahl, die nach zwei Zahlen steht <6 : 9>, mit der vierten <8> die Zahl, die nach drei Zahlen steht <8: 12> und so weiter in Folge. Eineindrittel aber <liegt vor>, wenn wir von der Zahl drei ausgehend alle Zahlen herausnehmen, die um drei verschieden sind <3, 6, 9 usw.>, und mit ihnen folgende Zahlen vergleichen: Mit der ersten die unmittelbar folgende Zahl <3 : 4>, mit der zweiten <6> die Zahl, die nach einer steht <8; also 6 : 8>, mit der dritten <9> die Zahl, die nach zweien steht <12; also 4 : 12>, mit der vierten <12> die Zahl, die nach dreien steht <12 : 16> und so weiter in Folge wie bei den vorhergehenden.

Für Eineinviertel aber werden wir ein Beispiel gewinnen, wenn wir von vier ausgehend alle Zahlen herausnehmen, die um vier verschieden sind <4, 8, 12, 16, 20> und damit wiederum folgende Zahlen vergleichen: Mit der ersten <4> die unmittelbar folgende Zahl <4 : 5>, mit der zweiten <8> die Zahl, die nach einer steht <8 : 10>, mit der dritten <12> die Zahl, die nach zweien steht <12 : 15>, und so immer weiter wie bei den bisherigen Zahlen <16 : 20 usw.>.

Und bei den übrigen Formen des Superpartikularen werden wir analog verfahren, indem wir genau dem Namen des Teils entsprechend die ersten Zahlen nehmen, die von sich aus den Teil herstellen können, und dementsprechend werden die verglichenen Größen deren Superpartikulare sein, die sich auch um eins von ihnen <den Teilen> unterscheiden und Grundformen der Verhältnisse bilden werden. Die Benennung des Teils aber wird, immer nach dem kleineren Verhältnis betrachtet, um eins größer lauten entsprechend der größeren Zahl. Es wird aber nach den größeren Termen keine Prüfung des Teils möglich sein, weil sich zeigen wird, dass keine der Grundformen jenen Teil enthält, entsprechend dem jede Zahl von ihnen ein Superpartikular der verglichenen kleineren Zahl ist; die Verhältnisse aber steigern sich entsprechend den Grundformen.

Ἐπιμερὴς δέ ἐστι σχέσις, ὅταν ὁ μείζων ὅρος ἔχῃ **[42]** τὸν ἐλάττονα καὶ ἔτι μέρη τινὰ αὐτοῦ πλείονα ἑνὸς δηλονότι. ἀλλ' ἐὰν δύο ταῦτα, ἐπιδιμερὴς λέγεται καὶ ὁ ἐλάττων ὑποδιμερής, ἐὰν δὲ τρία ἐπιτριμερὴς καὶ ὑποτριμερής, ἐὰν δὲ τέσσαρα ἐπιτετραμερὴς καὶ ὑποτετραμερὴς καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

ὑπόδειγμα δ' ἕξομεν ἐπιδιμερῶν μὲν ἐὰν ἐκθέμενοι τοὺς ἀπὸ τριάδος περισσοὺς συγκρίνωμεν ἑκάστῳ τὸν παρ' ἕνα αὐτῶν, ἐπιτριμερῶν δὲ ἐὰν τοὺς ἀπὸ τετράδος ἐκθέμενοι συνεχεῖς ἀριθμοὺς συγκρίνωμεν αὐτοῖς τοὺς παρὰ δύο.

ἐπεὶ δὲ οὐκ εἰλικρινεῖς ἀλλὰ πεφυρμέναι ἑτέραις σχέσεσιν αἱ τοιαῦται πλάσεις, χρησόμεθα ταῖς κατὰ πολλαπλασίων λόγον προκοπαῖς, ὥσπερ ἐπὶ τῶν μορίων πυθμένας λαμβάνοντες τοὺς παρέξοντας ἀφ' ἑαυτῶν τὰ μέρη, καθὰ ὁ ἐπιμερὴς κέκληται, οἷον ἐπιδιμερῶν τὸν πέντε πρὸς τρία, εἶτα διπλασίους καὶ τριπλασίους τούτων καὶ ἐπ' ἄπειρον, ἐπιτριμερῶν δὲ ἑπτὰ πρὸς τέσσαρα, εἶτα διπλασίους καὶ τριπλασίους αὐτῶν καὶ ἑξῆς ἀκολούθως, ἐπιτετραμερῶν δὲ ἐννέα πρὸς πέντε, καὶ ἀνάλογον μέχρι παντός, ἵν' ἡ μὲν τῶν ἐλαττόνων ὅρων προκοπὴ ἐν τοῖς πυθμέσι κατὰ τοὺς ἀπὸ τριάδος ἐφεξῆς ἀριθμοὺς γίνηται, ἡ δὲ τῶν μειζόνων κατὰ τοὺς ἀπὸ πεντάδος περισσούς.

καθόλου δὲ πυθμένας ἕξομεν παντὸς λόγου, ἐν μὲν πολλαπλασίοις, ἐφ' ὧν ἡ μονὰς ἐλάττων ὅρος ἐστὶ τῶν συγκρινομένων, ἐξαίρετον δ' ἐπὶ διπλασίου τὸ τὴν αὐτὴν καὶ διαφορὰν εἶναι· ἐν δὲ ἐπιμορίοις κατὰ μὲν τὸ ἡμιόλιον ἡ δυὰς ἔσται ὁ ἐλάττων ὅρος, διαφορὰν δὲ ἕξουσιν οἱ ὅροι **[43]** πάλιν μονάδα.

Überteilende Relationen

Überteilend <superpartient> aber ist eine Relation dann, wenn der größere Term **[42]** in sich die kleinere Größe und dazu natürlich noch mehr Teile davon als nur einen einschließt. Sind es aber zwei Teile <neben dem ganzen Wert>, spricht man von zweimal überteilend <superbipartient; z.B. 9 ist $1\frac{2}{7}$ von 7>, während die kleinere Zahl Zweimalunterteilend heißt; sind es drei Teile, sagt man Dreimalüberteilend <supertripartient> und Dreimalunterteilend, bei vieren Viermalüberteilend <superquadripartient> und Viermalunterteilend und so in der Folge immer weiter.

Ein Beispiel aber für Zweimalüberteilendes werden wir gewinnen, wenn wir von der Drei an die ungeraden Zahlen herausnehmen und mit jeder davor die Zahl vergleichen, die nach einer steht <$\frac{5}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{11}{9}$>; für die Dreifachüberteilenden <z.B. $1\frac{3}{4}$> <bekommen wir das Beispiel>, wenn wir von der Vier an in Reihe alle Zahlen herausnehmen und mit ihnen die vergleichen, die nach zweien <neben ihnen> stehen <$\frac{7}{4}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{9}{6}$>.

Da jedoch Zusammenstellungen dieser Art nicht rein sind, sondern mit anderen Relationen vermischt, werden wir das Fortschreiten im Verhältnis der Vielfachen anwenden und wie bei den Brüchen Grundformen nehmen, die von sich aus die Teile ergeben, nach denen der Überteiler benannt ist, zum Beispiel für das Zweimalüberteilende fünf zu drei, dann das Zweifache und Dreifache davon <$\frac{10}{6}$; $\frac{15}{9}$> und so ins Unendliche; für Dreifachüberteilendes aber sieben zu vier, darauf das Zweifache und Dreifache davon <$\frac{14}{8}$; $\frac{21}{12}$>, bei den Vierfachüberteilenden dann neun zu fünf und so unendlich weiter und so analog ganz hindurch, damit das Voranschreiten der kleineren Terme in den Grundformen entsprechend der Zahlenreihe von der Drei an stattfindet, während das Voranschreiten der größeren Terme entsprechend der Reihe der ungeraden Zahlen von der Fünf an vor sich geht <$\frac{5}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{11}{6}$>.

Insgesamt aber werden wir die Grundform jedes Verhältnisses in den Vielfachen gewinnen, bei denen die Eins den kleineren der verglichenen Terme darstellt; eine Ausnahme bildet aber beim Zweifachen, dass dieselbe Zahl zugleich den Unterschied darstellt. Bei den Superpartikularen aber wird entsprechend dem Eineinhalbfachen die Zwei der kleinere Term sein, und die Terme **[43]** werden als Unterschied wieder die Eins haben.

κατὰ δὲ τὸ ἐπίτριτον καὶ ἐπιτέταρτον καὶ τοὺς ἑξῆς ἐπιμορίους λόγους ἔσται ὁ ἐλάττων ὅρος ὁ τὴν ὀνομασίαν παρέχων ἀφ' ἑαυτοῦ τῷ μορίῳ, καθ' ὃ ἐπιμόριος λόγος ἐστί, διαφορὰ δὲ ἔσται ἐν πᾶσιν ἡ αὐτὴ μονάς.

ἀλλὰ καὶ ἐν ἐπιμορίῳ πυθμέσιν ἡ αὐτὴ μονὰς καίτοι τόπον οὐκ ἔχουσα ἢ τοῖς ὅροις ἐμφαντάζεσθαι, ὡς ἐπὶ τῶν τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν, ἢ διαφορὰ εἶναι αὐτῶν, ὡς ἐπὶ τῶν τοῦ ἐπιμορίου, διὰ τὸ πλείοσιν ἑνὸς μέρεσιν ὑπερέχειν τὸν μείζονα ὅρον τοῦ ἐλάττονος, τρόπον ἕτερον ἐνοφθῇ τοῖς ὅροις· τὰ γὰρ ἀπολειπόμενα ἐν τῷ μείζονι ἀκαταμέτρητα μόρια συγκρινόμενα τῷ ἐλάττονι διαφορὰν ἕξει πάντως μονάδα.

Λοιπόν ἐστιν εἰπεῖν περὶ τῶν μικτῶν σχέσεων ἔκ τε πολλαπλασίου καὶ τῶν λοιπῶν δύο ἐπιμορίου <καὶ ἐπιμεροῦς> καὶ τῶν ὑπολόγων τούτων, ἵνα κατὰ τὴν τῆς δεκάδος τελειότητα καὶ αἱ τῆς ἀνισότητος σχέσεις φυσικῶς τὴν γένεσιν ἴσχωσι, πέντε μὲν τῶν προλόγων ὄντων, πέντε δὲ τῶν τούτοις συζύγων ὑπολόγων· προλόγων μὲν κατά τε τὸ πολλαπλάσιον καὶ ἐπιμόριον καὶ ἐπιμερὲς καὶ πολλαπλασιεπιμόριον καὶ πολλαπλασιεπιμερές, ὑπολόγων δὲ τῶν ἴσων μετὰ τῆς ὑπό προθέσεως ὀνομαζομένων.

ἡ γὰρ τῆς ἰσότητος σχέσις ἅτε διαφορὰν οὐκ ἔχουσα ἢ ἀλλ' ὡσανεὶ ταυτότης οὖσα καὶ ἑνότης, εἴγε τὸ ἴσον ἓν πρὸς ἕν ἐστιν, ἑτέρας φύσεως ἔσται καὶ τῆς ἐναντίας γε τῇ ἀνισότητι, καὶ διὰ τοῦτο οὐ συγκαταριθμηθήσεται τοῖς εἴδεσι τῆς ἀνισότητος.

καὶ μὴν καὶ ἀρχῆς λόγον ἕξει ἡ ἰσότης πρὸς τὴν **[44]** ἀνισότητα, καθάπερ καὶ ἐν γραμμικοῖς ἡ ὀρθὴ γωνία πρὸς ἀμβλεῖαν καὶ ὀξεῖαν, καὶ ἐν μουσικοῖς διαστήμασιν ἡ μέση πρὸς τοὺς ἐπιτεινομένους φθόγγους καὶ ἀνιεμένους.

Beim Verhältnis Eineindrittel aber und bei fünf zu vier und den folgenden überteiligen Verhältnissen wird der kleinere Term dem Teil seinen Namen geben, entsprechend dem das superpartikulare Verhältnis besteht; den Unterschied aber wird bei allen diesen Brüchen durchgehend immer die Eins bilden < (n + 1) : n>.

Doch auch beim Superpartikularen wird bei den Grundformen die gleiche Eins, obschon diese eigentlich keinen Platz hat oder in den Termen aufscheint (wie bei den Formen des Vielfachen) oder ihren Unterschied bildet (wie bei den Formen des Superpartikularen), weil hier der größere Term den kleineren um mehr als einen Teil übertrifft), auf andere Art in den Termen erscheinen. Es werden nämlich die nicht gemessenen Teile in der größeren Zahl, wenn man sie mit der kleineren Zahl vergleicht, durchwegs den Unterschied eins aufweisen.

Vermischte Relationen: Entstehung aus Vielfachen, Überteiligen, Überteilenden

Nun bleibt noch übrig, von den vermischten Relationen zu sprechen, die aus dem Vielfachen und den beiden übrigen, dem Überteiligen <und dem Überteilenden> und den Hintergliedern dieser Relationen bestehen, damit entsprechend der Vollendung der Zehnerzahl auch die Relationen der Ungleichheit ihre natürliche Entstehung haben, wobei es fünf Vorderglieder gibt und fünf Hinterglieder, die mit diesen gepaart sind, und zwar Vorderglieder entsprechend dem Vielfachen und Überteiligen und dem Überteilenden, dem Vielfachen einer anderen Zahl und einem Teil derselben dazu <z.B. $3\frac{1}{3}$>, und schließlich dem Vielfachen einer anderen Zahl, woran noch ein Teil fehlt <z.B. $2\frac{3}{4}$ oder $4\frac{5}{6}$>; bei Hintergliedern sind es die gleichen Verhältnisse, doch ist die Präposition "unter" bei der Bezeichnung vorangestellt.

Die Relation der Gleichheit nämlich, bei der es ja keinen Unterschied gibt, sondern die nur sozusagen Identität und Einheit bedeutet, jedenfalls wenn Eins im Verhältnis zu Eins das Gleiche ist, wird von anderem und entgegengesetztem Wesen gegenüber der Ungleichheit sein, und deshalb wird sie nicht den Formen der Ungleichheit zugezählt werden können.

Ja, die Gleichheit wird auch das Urverhältnis gegenüber der **[44]** Ungleichheit darstellen ebenso wie bei geometrischen Dingen der rechte Winkel gegenüber dem stumpfen und spitzen Winkel und bei musikalischen Intervallen der mittlere Ton gegenüber den höheren und tieferen Tönen.

καὶ γὰρ ταῦτα ἀπό τινος ὡρισμένου καὶ πεπερασμένου λαβόντα κατὰ τὸν τῆς ἰσότητος λόγον, ἀπὸ τούτου τὴν παρατροπὴν ἐπί τε τὸ μεῖζον καὶ τὸ ἴσον ἴσχοντα κατὰ τὴν ἀνισότητα ἐπ' ἄπειρον πρόεισιν.

ἵν' οὖν δεδειγμένον ᾖ τὸ τὰς τῆς ἀνισότητος σχέσεις ἐκ τῆς ἰσότητος φυσικῇ ἀνάγκῃ γίνεσθαι καὶ οὐχ ἡμῶν θεμένων, καὶ πρῶτόν γε τὴν πολλαπλασιότητα ἀπὸ διπλασίου ἀρξαμένην, ἀφ' ἧς πάλιν τὴν ἐπιμοριότητα ἀπὸ ἡμιολίου τὴν ἀρχὴν ἴσχουσαν, καὶ ἀπὸ ταύτης τὴν ἐπιμερότητα κατὰ τὴν ἀνάλογον τάξιν καὶ ἑξῆς ἀπὸ τούτων τὰς μικτάς, ἐκθετέον τρεῖς ὅρους, καὶ πρῶτόν γε ἐν μονάσιν εἶτα <ἐν> δυάσι καὶ πάλιν ἐν τριάσι καὶ ἑξῆς ἀκολούθως, καὶ παρ' ἑκάστην ἔκθεσιν ἄλλους τρεῖς ὅρους πλαστέον διὰ τριῶν προσταγμάτων ἀεὶ τῶν αὐτῶν, καὶ παρὰ τοὺς πλασθέντας ἑκατέρους τρεῖς καὶ ἐκ τούτων ἄλλους καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

ἐφ' ἑκάστης δὲ πλάσεως πειρατέον κατὰ φύσιν τε καὶ ἀναστρόφως τοὺς ὅρους ἐκτίθεσθαι, καὶ δευτέραν ἔκθεσιν τοῖς αὐτοῖς προστάγμασι χρωμένους πλάσσειν τοὺς ἀπ' αὐτῶν. ἔσται δὲ τὰ προστάγματα τάδε· ποιήσας πρῶτον ὅρον πρώτῳ τῶν ἐκκειμένων ἴσον, δεύτερον δὲ πρώτῳ ἅμα καὶ δευτέρῳ, τὸν δὲ τρίτον πρώτῳ δυσὶ δευτέροις ἅμα καὶ τρίτῳ.

ἐκ πάν**[45]**των οὖν ἐν ἰσότητι ὅρων τριῶν προεκτεθέντων, εἶτ'ἐν μονάσιν εἶτ' ἐν δυάσιν ἢ καὶ τριάσι καὶ ἐφεξῆς, διὰ τῶν προειρημένων προσταγμάτων γενικῶς μὲν πολλαπλάσιοι γενήσονται, εἰδικῶς δὲ πολλαπλασίων οἱ διπλάσιοι, πρῶτοι μὲν ἐκ μονάδων, οἱ δὲ συνεχεῖς ἐκ δυάδων καὶ οἱ μετ' αὐτοὺς ἐκ τριάδων καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

ἐκ δὲ τῶν πλασθέντων διπλασίων τριπλάσιοι, πρῶτοι πάλιν ἐκ πρώτων καὶ συνεχεῖς ἐκ συνεχῶν, ἐκ δὲ τριπλασίων τετραπλάσιοι ἀποσῴζοντες τὴν αὐτῶν εὐταξίαν, καὶ ἐκ τετραπλασίων πενταπλάσιοι καὶ ἀεὶ οἱ ἑπόμενοι λόγοι ἐκ τῶν ἡγουμένων.

Denn auch dieses Verhältnis geht von etwas Bestimmtem und Begrenztem aus, entsprechend dem Verhältnis der Gleichheit, wendet sich jedoch von hier aus ab und zu dem hin, was das Größere und Gleiche entsprechend <dem Verhältnis> der Ungleichheit besitzt, und schreitet zum Unendlichen voran.

Damit nun der Beweis dafür geführt sei, dass die Relationen der Ungleichheit mit natürlicher Notwendigkeit aus der Gleichheit hervorgehen und nicht von uns stammen, weiter: Dass zuerst die Vielfachheit vom Zweifachen ihren Ausgang nahm (von dem wiederum das superpartikuläre Verhältnis vom Eineinhalbfachen aus seinen Ursprung hatte), auch: Dass davon das überteilende in analoger Anordnung hervorging und aus diesen anschließend die gemischten Proportionen, dazu muss man drei Terme hinstellen, und zwar zuerst in Einheiten <1, 1, 1>, dann in Zweiheiten <2, 2, 2> und wiederum in Dreiheiten und so weiter in Folge; und neben jeder Zusammenstellung muss man drei andere Terme mit Hilfe von drei immer gleichen Vorschriften bilden und neben diesen gebildeten Termen jeweils drei weitere dazu, und nach diesen weitere und so immer voran in Folge.

Bei jeder Bildung aber muss man versuchen, die Terme naturgemäß und in umgekehrter Ordnung aufzustellen und dann als eine zweite Reihe nach denselben Vorschriften die von ihnen ausgehenden Größen zu bilden. Die Vorschriften werden aber folgende sein: Man bildet einen ersten Term, der dem ersten der aufgestellten gleich ist, dann einen zweiten, der dem ersten und zweiten zusammen gleich ist, und den dritten, der dem ersten, den beiden zweiten zusammen und auch dem dritten gleich ist.

Aus **[45]** allen drei Größen nun, die in Gleichheit zuvor in Reihe aufgestellt waren, ob nun in Einheiten <1, 1, 1>, in Zweiheiten oder auch in Dreiheiten und den folgenden Termen, werden generell mit Hilfe der vorher genannten Vorschriften Vielfache entstehen, speziell aber von den Vielfachen die Doppelten, zuerst von den Einheiten, die folgenden dann von Zweiheiten und die nach ihnen aus Dreiheiten und so der Reihe nach weiter.

Aus den gebildeten Zweifachen aber entstehen Dreifache, die ersten wieder aus den ersten und die folgenden aus den folgenden, aus den Dreifachen aber Vierfache, indem sie ihre schöne Ordnung wahren, auch aus den Vierfachen Fünffache und so immer die folgenden Verhältnisse aus den vorhergehenden.

εἰ δὲ πλάσσοντες οὐ τῇ τοιᾷδε κατὰ φύσιν τῶν ὅρων ἐκθέσει χρησαίμεθα, ἀλλὰ ἀναστρέψαιμεν τοὺς πρώτους ἀπὸ τῶν ἰσοτήτων πλασθέντας ὅρους, ὥστε τὸν τρίτον ὅρον ἐν τῇ τοῦ πρώτου χώρᾳ τάξαι τὸν δὲ πρῶτον ἐν τῇ τοῦ τρίτου, τὸν δὲ μέσον ὁμοίως μέσον τηρήσαιμεν, ἔπειτα διὰ τῶν αὐτῶν προσταγμάτων ἑτέρους πλάσσοιμεν, φύσονται γενικῶς μὲν ἐπιμόριοι ἀπὸ πολλαπλασίων, εἰδικῶς δὲ ἡμιόλιοι μὲν ἀπὸ διπλασίων εὔτακτοι ἀπ' εὐτάκτων, ἐπίτριτοι δὲ ἀπὸ τριπλασίων ἀποσῴζοντες τὴν αὐτὴν τάξιν, καὶ ὁμοίως ἐπιτέταρτοι ἀπὸ τετραπλασίων καὶ ἐπίπεμπτοι ἀπὸ πενταπλασίων καὶ ἑξῆς κατά τινα συγγένειαν φυσικὴν συμπαρεκτεινομένων τοῖς εἴδεσι τοῦ πολλαπλασίου τῶν παρωνυμούντων καθ' ἕκαστον εἶδος ἐπιμορίων.

ἐκ δὲ αὐτῶν τούτων πάλιν ἀναστραφέντων τῶν ὅρων τοὺς ἐπιμερεῖς λόγους πάντως γεννήσομεν πρώτους πάλιν ἐκ πρώτων καὶ δευτέρους ἐκ δευτέρων καὶ τρίτους ἐκ τρίτων καὶ ἑξῆς ἀκολούθως, καὶ τούτων **[46]** διευτακτουμένων καταλλήλως τῇ ἐξ ἀρχῆς παρωνυμήσει.

ὑποδείγματος δὲ ἕνεκα ἔστωσαν μονάδες τρεῖς κατ' ἴσον λόγον προεκκείμεναι. εἰ δὴ ποιήσαιμεν κατὰ τὰ εἰρημένα προστάγματα πρῶτον ὅρον πρώτῳ ἴσον ἔσται μονάς, εἰ δὲ δεύτερον πρώτῳ καὶ δευτέρῳ ἔσται δυάς, εἰ δὲ τρίτον πρώτῳ δυσὶ δευτέροις τρίτῳ ἔσται τετράς, καὶ γενήσονται οἱ πλασθέντες ἐν διπλασίῳ λόγῳ α′ β′ δ′.

ἐκ δὲ αὐτῶν κατὰ τὰ αὐτὰ προστάγματα ἕξομεν τοὺς ἐν τριπλασίῳ α′ γ′ θ′, καὶ ἀπὸ τούτων τοὺς ἐπὶ τούτοις ἐν τετραπλασίῳ α′ δ′ ις′, καὶ ἐφεξῆς ἀκολούθως.

εἰ δὲ δυάδας ἐν ἰσότητι προεκθοίμεθα, ἔσονται οἱ ἑξῆς ὅροι ἐν διπλασίῳ ὁμοίως ὄντες λόγῳ οἱ β′ δ′ η′, καὶ ἀπὸ τούτων πάλιν οἱ ἑξῆς τριπλάσιοι β′ ς′ ιη′, ἀφ' ὧν οἱ ἑξῆς τετραπλάσιοι β′ η′ λβ′, καὶ ἀθρόοι ἀκόλουθοι.

εἰ δὲ ἀναστρέψαιμεν τοὺς πρώτους ἐν διπλασίῳ λόγῳ τοὺς α′ β′ δ′ διὰ τῶν αὐτῶν προσταγμάτων ποιήσομεν τοὺς πρώτους ἐν ἡμιολίῳ ἀναλογίᾳ ὄντας τοὺς δ′ ς′ θ′, ἀπὸ δὲ τούτων πάλιν ἀναστραφέντων τοὺς ἐν ἐπιδιμερεῖ ὁμοίως ἀναλογίᾳ ὄντας τοὺς θ′ ιε′ κε′.

Wenn wir aber beim Bilden nicht die so beschaffene natürliche Reihe der Terme anwenden, sondern die ersten von den Gleichheiten gebildeten Terme vertauschen, so dass wir den dritten Term an die Stelle des ersten Terms setzen und den ersten an die Stelle des dritten, während wir den Term in der Mitte der beiden wie bisher auch schon in der Mitte stehen lassen, und sodann aufgrund derselben Vorschriften andere Verhältnisse bilden, dann werden generell Überteilige von Vielfachen entstehen, speziell aber Anderthalbfache von Doppelten, wohlgeordnete Verhältnisse aus wohlgeordneten Verhältnissen, und ebenso das eineindrittelmal Größere <$1\frac{1}{3}$> von Dreifachen, auch diese, indem sie die gleiche Ordnung beibehalten, und ebenso eineinviertelmal Größere von Vierfachen, und eineinfünftelmal Größere von Fünffachen und so in Folge weiter entsprechend einer gewissen natürlichen Verwandtschaft, weil sich mit den Formen des Vielfachen die gleichnamigen Überteiligen in jeder Form mit ausdehnen.

Wenn wir nun gerade von denselben wiederum die Terme vertauschen, werden wir durchaus die überteilenden Verhältnisse erzeugen, die ersten wieder von den ersten Verhältnissen, die zweiten von den zweiten, die dritten aus den dritten und so in Folge der Reihe nach weiter, wobei auch diese **[46]** Zahlen durchgehend in schöner Ordnung entsprechend der anfänglichen Benennung stehen.

Als Beispiel seien aber drei Einsen in gleichem Verhältnis hingestellt <1, 1, 1>. Wenn wir nun, nach den genannten Vorschriften verfahrend, den ersten Term dem ersten gleich machen, wird es eine Eins sein, wenn wir aber den zweiten Term der Summe des ersten und des zweiten Terms gleich machen, wird es eine Zwei sein; machen wir aber den dritten Term gleich der Summe des ersten, zwei zweiten und des dritten, wird sich die Vier ergeben. Und die gebildeten Terme werden, im Verhältnis der Verdoppelung, sein: 1, 2, 4.

Von diesen Termen aber werden wir entsprechend denselben Vorschriften, verdreifacht, 1, 3, 9 erhalten, und von diesen auch die dann folgenden im Verhältnis des Vierfachen 1, 4, 16 und so weiter in Folge.

Wenn wir aber in der Gleichheit erst Zweier in Reihe anordnen, werden die in gleicher Weise im doppelten Verhältnis stehenden Terme folgende sein 2, 4, 8; und nach diesen wiederum die folgenden dreifachen <Terme> 2, 6, 18, von diesen die folgenden vierfachen <Terme > 2, 8, 32 und alle folgenden.

Wenn wir aber die ersten Zahlen, 1, 2, 4, in doppeltem Verhältnis umtauschen <nämlich 4, 2, 1>, werden wir mit Hilfe derselben Vorschriften die ersten Zahlen in eineinhalbfacher Proportion erhalten, nämlich 4, 6, 9, und wenn wir diese wiederum umtauschen <also 9, 6, 4>, erhalten wir in gleicher Art die im Verhältnis Einzweidrittelmal stehenden Zahlen 9, 15, 25.

ἐκ τούτου συμφανῆ γίνεσθαι τὴν συγγένειαν τῶν σχέσεων. εἰ γὰρ ὁ διπλάσιος λόγος ἀπὸ ἰσότητος ἐγεννήθη, ἐμάθομεν δὲ παρωνομασμένον τὸ ἥμισυ τῷ δύο, εἰκότως ἑξῆς ὡς οἰκεῖος ὁ ἡμιόλιος λόγος ἐπλάσθη ἐν ἐπιμορίοις, ἀπὸ δὲ τούτου πάλιν ὡς ἐν ἐπιμερέσι κατὰ τὴν οἰκειότητα τῆς δυάδος ὁ ἐπιδιμερής. εἰ δὲ οἱ πρῶτοι ἐν τριπλασίῳ λόγῳ, ἐκφύσονται ἀπ' αὐτῶν ἐπίτριτοι καὶ ἀπὸ τούτων ἐπιτριμερεῖς, εἰ δὲ τετραπλάσιοι ἐπιτέταρτοί τε καὶ ἐπιτετραμερεῖς καὶ ἀεὶ οἱ ἑξῆς, ἀποσῴζοντες τὴν **[47]** οἰκειότητα τῆς παρωνυμήσεως καὶ πυθμένες μὲν ἀπὸ πυθμένων δεύτεροι δὲ ἀπὸ δευτέρων καὶ τρίτοι ἀπὸ τρίτων καὶ ἀεὶ ὁμοίως.

πυθμένας δὲ ἐπιμορίων ἐν τρισὶν ὅροις μὴ τοὺς αὐτοὺς οἰώμεθα γενήσεσθαι, ὅπερ ἐν δυσὶ φαίνονται· οὐ γὰρ δυνατὸν ἐν δυσὶν ὄντος λόγου τινὸς καὶ τρίτον ὅρον προσπορισθῆναι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸν μέσον ἀποσῴζοντα, διότι μὴ τοῦ αὐτοῦ μορίου παρεκτικός ἐστιν ὁ μείζων, καθ' ὃ ἐπιμόριός ἐστι τοῦ πρώτου, ἵνα καὶ ὁ τρίτος κατ' αὐτὸν ἐκείνῳ τὸν λόγον ἀποσῴζῃ·

πᾶς γὰρ ἐπιμορίου λόγου πυθμὴν ὁ τοὺς ὅρους ἔχων μονάδι διαφέροντας οὐχ ὁμοίους αὐτοὺς ἕξει διαιρετούς, ἀλλ' εἰ μὲν ὁ ἐλάττων διχῇ διαιροῖτο, ὁ μείζων τριχῇ, εἰ δὲ ὁ ἐλάττων τριχῇ, ὁ μείζων τετραχῇ, καὶ ἀεὶ μονάδι μεγαλωνυμωτέραν ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος τὴν διαίρεσιν ἐπιδέξεται, ὥστε τοῦ μορίου ἐν λόγῳ ᾡτινιοῦν κατὰ τὸν ἐλάττονα ἐξεταζομένου, ὃς ὑπόλογός ἐστι πρὸς τὸν μείζονα, οὐκ ἔσται τις τρίτος πρόλογος κατ' ἐκεῖνο τὸ μόριον ὑπόλογον ἔχων τὸν μείζονα.

An diesem Verfahren wird die Verwandtschaft der Relationen insgesamt sichtbar. Wenn nämlich das zweifache Verhältnis von der Gleichheit aus entstand, wir aber lernten, dass die Hälfte und Zwei gleichnamig sind, dann würde passend im Folgenden das einundeinhalbfache Verhältnis bei den überteiligen Verhältnissen als verwandt gebildet, und davon aus wiederum wie bei den überteilenden entsprechend der Verwandtschaft der Zweiheit das Verhältnis Einundzweidrittel.

Wenn aber die ersten Zahlen im dreifachen Verhältnis stehen, werden aus ihnen größere Zahlen entstehen, die ein Ganzes und ein Drittel enthalten, und aus diesen werden Zahlen entstehen, die ein Ganzes und drei Viertel enthalten; sind es aber vierfache Zahlen, entstehen Zahlen, die ein Ganzes und ein Viertel und auch Zahlen, die ein Ganzes und vier Fünftel enthalten, und so immer weiter die folgenden Zahlen, die die Verwandtschaft der Namensableitung **[47]** bewahren; und es entstehen Grundformen aus Grundformen, zweite Grundformen aus den zweiten, dritte aus den dritten und so immer weiter.

Dass jedoch die gleichen Grundformen der Überteiligen wie bei zwei Größen auch bei drei Termen entstehen, wollen wir nicht annehmen. Ist es doch unmöglich, dann, wenn ein Verhältnis bei zwei Termen besteht, auch noch einen dritten Term beizufügen, der das gleiche Verhältnis gegenüber dem mittleren Term beibehält, weil der größere nicht den gleichen Teil herstellt, entsprechend dem sie dem ersten Term gegenüber überteilig ist, damit auch der dritte im gleichen Verhältnis wie er das Verhältnis bewahrt.

In jeglicher Grundform nämlich eines überteiligen Verhältnisses, bei der die Terme sich um eins unterscheiden, lassen sich die beiden Zahlen nicht gleich aufteilen, nein: Wenn sich der kleinere Term durch zwei teilen lässt, wird der größere durch drei geteilt; lässt sich aber der kleinere in drei Teile zerlegen, wird der größere in vier Teile geteilt; und durchgehend wird der größere Term eine um eins größere Teilung als der kleinere Term bekommen, so dass, wenn man den Teil in einem beliebigen Verhältnis nach der kleineren Zahl hin prüft, die in Bezug auf die größere Zahl das Hinterglied bildet, es kein drittes Vorderglied gibt, das - diesem Teil entsprechend - die größere Zahl als Hinterglied hat.

ἀλλ' οὖν ἐπεὶ μή εἰσιν οἱ αὐτοὶ τοῖς ἐν δυσὶν οἱ ἐν τρισίν, ἑτέρως ἐμφαντασθήσονται οἱ πυθμένες τοῖς ἀνάλογον· διαφοραὶ γὰρ αὐτῶν γενήσονται, οἷον φέρ' εἰπεῖν ἐπεὶ ἀνάλογον ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ εἰσὶν οἱ δ′ ς′ θ′, ἔσονται αὐτῶν διαφοραὶ οἱ τὸν αὐτὸν λόγον περιέχοντες πυθμένες ὁ γ′ καὶ ὁ β′, καὶ πάλιν ἐν ἐπιτρίτῳ οἱ θ′ ιβ′ ις′, ἔσονται διαφοραὶ τούτων οἱ πυθμενικοὶ ὁ δ′ πρὸς τὸν γ′, καὶ ἀεὶ ὁμοίως τὸ αὐτὸ συμβήσεται ἐν ἅπασι τοῖς εἴδεσι τῶν ἐπιμορίων· καθ' ὃ γὰρ πυθμένες ἔσονται ἐν τρισίν, ὧν διαφοραὶ οἱ ἐν δυσίν.

ἐν δὲ τοῖς πολλα**[48]**πλασίοις οἱ ἀνάλογον ἀπ' ἀρχῆς ἐκκείμενοι τοὺς ἐλάττονας ὅρους ἀεὶ πυθμένας ἕξουσι καθ' ἕκαστον λόγον. αἰτία δὲ τούτου ἡ μονὰς ὑπόλογον ἑαυτὴν πρὸς πάντας λόγους τοῦ πολλαπλασίου παρέχουσα. οὐδὲν δὲ ἧττον καὶ αἱ ἐν τοῖς ἀνάλογον διαφοραὶ τὸν αὐτὸν λόγον περιέξουσιν, εἰ καὶ μὴ πυθμένες εἰσὶ τῶν λόγων, ὡς ἐπὶ τῶν ἐπιμορίων συνέβαινε.

μόνοι δὲ οἱ ἐν διπλασίῳ ἀνάλογον ἀπ' ἀρχῆς ἐξαίρετον ἕξουσι τὸ καὶ διαφορὰς ἔχειν τοὺς ἐλάττονας ὅρους, οἵπερ εἰσὶ πυθμενικοί.

ἐν δὲ τοῖς τῶν ἐπιμερῶν εἴδεσιν οἱ τοὺς πυθμένας τῶν λόγων περιέχοντες ὅροι οὔτ' ἐν ταῖς διαφοραῖς φανήσονται ὡς ἐπὶ τῶν ἐπιμορίων, οὔτε ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις ὡς ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων, ἀλλὰ κατά τινα ἄλλην εὔτακτον ἀναλογίαν.

οἱ μὲν γὰρ ἐν λόγῳ ἐπιδιμερεῖ ἀνάλογον ὄντες ἐν ἡμίσει τῶν διαφορῶν τοὺς πυθμενικοὺς περιέξουσι, πάλιν κἀνταῦθα τῆς οἰκειότητος τοῦ ἡμίσους πρὸς τὴν δυάδα, καθ' ἣν ἐπιδιμερὴς ὁ λόγος ἐστί, ἐμφαινομένης·

οἱ δ' ἐν ἐπιτριμερεῖ ἐν τρίτῳ τῶν διαφορῶν οἱ δὲ ἐν ἐπιτετραμερεῖ ἐν τετάρτῳ καὶ οἱ ἐν ἐπιπενταμερεῖ ἐν πέμπτῳ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς τὸ ὅμοιον ἔσται, ἀποσῳζομένης τῆς συμφυΐας τοῦ μορίου πρὸς τὸν λόγον.

καὶ γὰρ καθ' αὑτοὺς οἱ λόγοι ἐν τοῖς μέρεσι τὴν ὀνομασίαν ἴσχουσιν ἐξεταζόμενοι πρὸς τὰ μόρια, καθά ἐστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος ὅρου πρὸς τὸν ἐλάττονα μονάδι μειωνυμώτερον·

Da aber nun bei den drei <Termen> es nicht dieselben Verhältnisse sind wie bei zwei <Termen>, werden sich die Grundformen anders darstellen als bei den analogen Grundformen; es wird nämlich Unterschiede zwischen ihnen geben; zum Beispiel etwa, weil beim einundeinhalbfachen Verhältnis die Zahlen 4, 6, 9 im gleichen Verhältnis stehen, werden ihre Unterschiede die dasselbe Verhältnis umfassenden Grundzahlen 3 und 2 sein, und wiederum werden es beim Eineindrittel-Verhältnis die Zahlen 9, 12, 16 sein, ihre Unterschiede werden die Grundformzahlen 4 zu 3 sein, und immer wird sich in gleicher Weise das Gleiche bei allen Formen der überteiligen Verhältnisse ergeben. Dementsprechend nämlich werden die Zahlen die Grundformen bei dreien sein, deren Unterschiede die Zahlen bei zweien sind.

Bei den Vielfachen **[48]** aber werden die von Anfang an analog in Reihe aufgestellten Terme entsprechend jedem Verhältnis immer die kleineren Terme als Grundformen haben. Ursache dafür ist aber die Eins, die sich selbst als Hinterglied bei allen Verhältnissen des Vielfachen darstellt. Trotzdem aber werden auch die Unterschiede in den analogen Verhältnissen dasselbe Verhältnis umfassen, wenn sie auch nicht Grundformen der Verhältnisse sind, wie es bei den überteiligen geschah.

Allein die im doppelten Verhältnis werden von Anfang an die besondere Eigenschaft besitzen, dass sie auch die kleineren Terme als Unterschiede haben, die doch die Grundformzahlen sind.

In den Formen aber der Überteilenden werden die Terme, die die Grundformen der Verhältnisse umfassen <Vorder- und Hinterglied>, weder in den Unterschieden erscheinen wie bei den überteiligen noch bei den geringeren Termen wie bei den Vielfachen, sondern nach einer anderen wohlgeordneten Proportion.

Denn die in einem Einzweidrittel-Verhältnis analog stehenden Zahlen werden in der Hälfte der Unterschiede die Grundformzahlen umfassen, wobei wiederum auch hier die Verwandtschaft des Halben mit der Zwei, entsprechend der das Verhältnis Einzweidrittel ist, in Erscheinung tritt.

Die Zahlen im Verhältnis Eindreiviertel aber <werden > im Drittel der Unterschiede <die Grundformen umfassen>, die im Verhältnis Einvierfünftel im Viertel und die im Verhältnis Einfünfsechstel im Fünftel, und in diesem Verhältnis wird es immer weitergehen, weil der gemeinsame Zusammenhang des Bruchs mit dem Verhältnis durchgehalten wird.

Denn die Verhältnisse werden auch in den Teilen nach sich selbst benannt sein, wenn man sie an den Brüchen prüft, entsprechend dem Verhältnis, nach dem der größere Term den geringeren übertrifft, der um eins kleiner ist.

ἐπιδιμερὴς μὲν γὰρ ἔσται ὁ πρῶτος λόγος τρίτων, ἐπιτριμερὴς δὲ ὁ δεύτερος τετάρτων καὶ ἐπιτετραμερὴς ὁ τρίτος πέμπτων καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

[49] Αἱ δὲ μικταὶ σχέσεις ἔκ τε πολλαπλασίου καὶ ἑκατέρου τῶν λοιπῶν ἐπιμορίου καὶ ἐπιμεροῦς γεννῶνται καὶ αὗται ἐκ τῶν πρὸ ἑαυτῶν, ἡ μὲν ἐν πολλαπλασιεπιμορίῳ λόγῳ ἐκ τῆς ἐν ἐπιμορίῳ, ἀφ' ἧς καὶ <ἡ> ἐν ἐπιμερεῖ ἐγεννᾶτο, οἷον εἰδικῶς ἡ διπλασιεφήμισυς ἀπὸ τῆς ἐν ἡμιολίοις φύεται, οὐκέτι ἀναστρόφως τῶν ὅρων κειμένων, ἀλλὰ κατὰ φύσιν χρωμένων ἡμῶν τοῖς αὐτοῖς τρισὶ προστάγμασιν· οὔσης γὰρ ἀναλογίας ἐν ἡμιολίῳ τῆς δʹ ςʹ θʹ, ἧς αἱ διαφοραὶ οἱ πυθμενικοὶ ὅροι, πλασθήσεται ἡ διπλασιεφήμισυς <ἐν> ὅροις τοῖς δʹ ιʹ κεʹ.

ἐκ δὲ τῆς ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ τῆς θʹ ιβʹ ιςʹ, ἧς πάλιν αἱ διαφοραί εἰσιν οἱ πυθμενικοὶ ὅροι, ὁμοίως ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος ὅρου ἀρχομένων ἡμῶν ἡ διπλασιεπίτριτος ἐν ὅροις τοῖς θʹ καʹ μθʹ.

ἐκ δὲ τῆς ἐν ἐπιτετάρτῳ τῆς ιςʹ κʹ κεʹ, ἧς αἱ διαφοραὶ πάλιν οἱ πυθμενικοί, ἡ διπλασιεπιτέταρτος γεννᾶται ἐν ὅροις τοῖς ιςʹ λςʹ παʹ, καὶ ἑξῆς ὁμοίως, ἀποσῳζομένης κἀνταῦθα τῆς οἰκειότητος τοῦ μετὰ τὴν πολλαπλασιότητα ἐπιτρέχοντος μορίου πρὸς τὴν ὀνομασίαν τοῦ ἐπιμορίου λόγου, ἀφ' οὗπερ ἡ γένεσίς ἐστι τῇ μικτῇ σχέσει.

ἐπεὶ γὰρ ἡμιόλιος ἡ γεννῶσα σχέσις διπλασιεφήμισυς ἡ γεννωμένη, ἐπεὶ δὲ ἐπίτριτος διπλασιεπίτριτος, καὶ <ἐπεὶ> ἐπιτέταρτος διπλασιεπιτέταρτος, καὶ ἑξῆς δὲ ἀκολούθως.

πάλιν δὲ καὶ τούτων οἱ πυθμένες διευτακτη**[50]**θήσονται οὐκέτ' αὐτόθεν ἐμφαινόμενοι ταῖς διαφοραῖς τῶν πλασσομένων, ὡς ἐπὶ τῶν ἁπλῶν σχέσεων ἐγίνετο, ἀλλὰ διὰ τὸ μικτὰς εἶναι τὰς σχέσεις καὶ τοὺς λόγους ηὐξῆσθαι ἐν μορίοις τῶν διαφορῶν ὄντες φανήσονται.

Denn Einzweidrittel wird das erste Verhältnis der Drittel, sein, Eindreiviertel aber das zweite Verhältnis der Viertel, Einvierfünftel das dritte Verhältnis der Fünftel, und so in gleicher Weise immer fort. **[49]**

Vermischte Relationen: Entstehung aus den jeweils vorhergehenden

Die vermischten Relationen aber aus dem Vielfachen und aus beidem der übrigen <Verhältnisse>, dem überteiligen und dem überteilenden, entstehen auch ihrerseits aus den <Relationen> vor ihnen, die Relation im vielfachen Überteiligen aus der Relation im Überteiligen, von der auch die Relation im Überteilenden entstand, wie zum Beispiel speziell das zweieinhalbmal so große Verhältnis aus dem eineinhalbmal so großen erwächst, wobei die Terme nicht mehr umgekehrt liegen, sondern wir der Natur entsprechend dieselben drei Vorschriften anwenden; da nämlich beim Eineinhalbfachen die Proportion 4, 6, 9 vorliegt, deren Unterschiede die Grundform-Terme sind, wird das zweieinhalbmal so große Verhältnis in den Termen 4, 10, 25 gebildet.

Aus der <Relation> im Verhältnis Eineindrittelmal, nämlich 9, 12, 16, bei der wiederum die Grundform-Terme die Unterschiede darstellen, entsteht in gleicher Weise, wenn wir mit dem kleineren Term beginnen, die zweieindrittelmal so große Relation in den Termen 9, 21, 49.

Aus der <Relation> im Verhältnis Einundeinviertelmal aber, nämlich 16, 20, 25, bei dem wiederum die Grundform-Terme die Unterschiede bereitstellen, entsteht dann die <Relation> Zweieinviertelmal in den Termen 16, 36, 81, und so geht es in gleicher Weise immer weiter, wobei auch hier die Verwandtschaft des Bruches, der nach der Vielfachheit nachläuft, mit dem Nenner des überteiligen Verhältnisses gewahrt bleibt, von dem ja die vermischte Relation ihre Entstehung hat.

Da nämlich die erzeugende Relation Eineinhalb ist, wird die erzeugte <Relation> zweieinhalbmal so groß, und weil <das erzeugende Verhältnis> Eineindrittel ist, <entsteht das Verhältnis> zweieindrittelmal so groß, und weil <das erzeugende Verhältnis> Eineinviertel ist, <wird das neue Verhältnis> zweieinviertelmal so groß und so in der Reihe weiterfolgend.

Wiederum aber werden auch deren Grundformen durchgehend in guter Ordnung sein, **[50]** obschon sie nicht mehr an gleicher Stelle erscheinen wie die Unterschiede der gebildeten Zahlen (wie es bei den einfachen Relationen geschah), sondern weil die Relationen gemischt sind und die Verhältnisse sich vergrößern, wird sich erweisen, dass sie in den Brüchen der Unterschiede liegen.

διπλασιεφημίσους μὲν γὰρ λόγου ὁ πυθμὴν ἐν τρίτῳ μέρει τῶν διαφορῶν, διπλασιεπιτρίτου δὲ ἐν τετάρτῳ καὶ διπλασιεπιτετάρτου δ' ἐν πέμπτῳ, καὶ ἑξῆς ἀκολούθως μονάδι μεγαλωνυμώτερον ἀεὶ ἔσται τὸ μόριον ἀντεξεταζόμενον πρὸς τὸ ὄνομα τοῦ ἐπιτρέχοντος μορίου ἐν τοῖς εἴδεσι τοῦ πολλαπλασιεπιμορίου.

παρατηρητέον δὲ ἐφ' ἑκάστης πλάσεως τῶν τε ἐπιμερῶν σχέσεων καὶ τῶν πολλαπλασιεπιμορίων πῶς καὶ ἀντιπεπόνθησίς τις γλαφυρὰ ὑποφύεται. αἱ μὲν γὰρ ἐπιμερεῖς ἅπαξ πλῆρες τὸ μέτρον προσέβαλλον καὶ πλείονα τὰ ἀκαταμέτρητα ἀπέλειπον μόρια ἀρχόμενα ἀπὸ δύο· ἐπιδιμερὴς γὰρ ἡ πρώτη, εἶτ' ἐπιτριμερὴς καὶ ἐπιτετραμερὴς καὶ ἑξῆς ἀκολούθως·

αἱ δὲ πολλαπλασιεπιμόριοι ἀντιπεπονθότως δὶς μὲν τὸ μέτρον προσβάλλουσι πληρούντως, ἓν δὲ μέρος ἀεὶ ἀπολείπουσιν ἀκαταμέτρητον ἀρχόμενον καὶ αὐτὸ ἀπὸ τοῦ συζυγοῦντος τῷ δύο ἀριθμῷ μορίου, καὶ ἑξῆς προκόπτον ἀκολούθως. ἐπὶ δὲ πασῶν τῶν πλασσομένων σχέσεων καὶ ἀφ' ὧν αἱ πλάσεις οἱ ἄκροι τετράγωνοι γίνονται. ἡ δὲ λοιπὴ μικτὴ σχέσις ἡ πολλαπλασιεπιμερὴς γεννᾶται ἐκ τῆς ἐπιμεροῦς, καὶ ἐκ μὲν τῆς ἐπιδιμεροῦς <ἢ> δὶς ἐπιτρίτου, εἰδικῶς τῆς θʹ καὶ ιεʹ κεʹ, ἀρχομένων ἡμῶν ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος ὅρου, γεννᾶται ἡ διπλασιεπιδιμερὴς **[51]** τρίτων ἐν ὅροις τοῖς θʹ κδʹ ξδʹ, ἐκ δὲ τῆς ἐπιτριμεροῦς ἢ τρὶς ἐπιτετάρτου τῆς ιϛʹ κηʹ μθʹ ἡ διπλασιεπιτριμερὴς τετάρτων ἐν ὅροις τοῖς ιϛʹ μδʹ ρκαʹ, πάλιν δὲ ἐκ τῆς ἐπιτετραμεροῦς ἢ τετράκις ἐπιπέμπτου τῆς κεʹ μεʹ παʹ γεννᾶται ἡ διπλασιεπιτετραμερὴς πέμπτων ἐν ὅροις τοῖς κεʹ οʹ ρϙϛʹ, καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον εὑρήσομεν ἀναλόγως καὶ ἀκολούθως προϊοῦσαν τὴν πλάσιν τῶν πολλαπλασιεπιμερῶν σχέσεων ταῖς ἐπιμερέσιν.

ἐκ μὲν γὰρ ἐπιδιμεροῦς τρίτων ἐγένετο ἡ διπλασιεπιδιμερὴς τρίτων, ἐκ δὲ τῆς ἐπιτριμεροῦς τετάρτων ἡ διπλασιεπιτριμερὴς τετάρτων, ἐκ δὲ τῆς ἐπιτετραμεροῦς πέμπτων ἡ διπλασιεπι-τετραμερὴς πέμπτων.

Die Grundform nämlich des zweieinhalbmal so großen Verhältnisses gehört zum Unterschied ein Drittel, die Grundform des zweieindrittelmal so großen <Verhältnisses> liegt im Viertel, die des zweieinviertelmal so großen <Verhältnisses> liegt im Fünftel, und so der Reihe nach in Folge; dabei wird immer der Nenner des Bruches um eins größer sein, verglichen mit dem Nenner des nachfolgenden Bruches in den Formen des Überteilig-Vielfachen.

Man muss aber bei jeder Bildung der überteilenden Relationen und der überteilig-vielfachen Relationen darauf achten, wie sich auch hier ein glasklares gegenseitiges Verhältnis bildet. Die überteilenden <Brüche> nämlich legten einmal das volle Maß zu und hinterließen, von zwei an beginnend, mehr ungemessene <Brüche>; die erste Relation ist nämlich einzweidrittel, dann eindreiviertel und einvierfünftel und so in Reihe folgend.

Die Überteilig-Vielfachen aber steigern im umgekehrten Verhältnis das Maß zweimal vollkommen, lassen aber immer einen Teil ungemessen, wobei auch dieser mit dem Bruch beginnt, der mit der Zahl zwei verbunden ist <$1\frac{1}{2}$> und in Reihe voranschreitet <2, 3, 4 usw.>. Bei all den gebildeten Relationen aber und <bei den Relationen>, von denen aus die Bildungen vorgenommen werden, sind die Randzahlen Quadratzahlen < 4, 6, 9; 4, 10, 25>. Die noch übrige gemischte Relation aber, die überteilende, entsteht aus der überteilenden und aus dem Ganzen mit zwei Dritteln oder Einzweidrittel, speziell aus der von 9 und 15 entsteht, wenn wir mit dem kleineren Term beginnen, **[51]** die Relation Zweizweidrittelmal so groß von den Dritteln in den Termen 9, 24, 64, und aus <der Relation> Einunddreiviertel oder dreimal ein Ganzes und Einviertel, nämlich aus 16, 28, 49 entsteht die zweidreiviertelfache <Relation> der Viertel in den Termen 16, 44, 121; wieder aber entsteht aus der <Relation> Einundvierfünftel oder viermal Einundeinfünftel, aus 25, 45, 81 die <Relation> Zweivierfünftelmal so groß von den Fünfteln in den Termen 25, 70, 196, und so der Reihe nach ins Unendliche, und wir werden finden, dass die Bildung von überteilend-vielfachen Relationen den Überteilenden entsprechend und folgend vorangeht.

Denn aus dem Ganzen und Zweidrittel der Drittel entstand die zweizweidrittelmal so große <Relation> der Drittel, aus der einunddreiviertel so großen <Relation> der Viertel entstand die zweidreiviertelmal so große der Viertel, aus der einsvierfünftel mal so großen der Fünftel entstand die zweivierfünftelmal so große der Fünftel.

πάλιν δὲ καὶ αὐτῶν τούτων οἱ πυθμένες κατά τινα λόγον φανήσονται διευτακτούμενοι· τῆς μὲν γὰρ διπλασιεπιδιμεροῦς τρίτων ἐν πέμπτῳ μέρει τῶν διαφορῶν ἐνοφθήσονται οἱ πυθμένες, τῆς διπλασιεπιτριμεροῦς τετάρτων ἐν ἑβδόμῳ, τῆς δὲ διπλασιεπιτετραμεροῦς πέμπτων ἐν ἐννάτῳ, καὶ ἀεὶ κατὰ δυάδος προσθήκην τὴν κλῆσιν ἕξει τὸ μόριον, οἷον ὁ ια' καὶ ιγ' καὶ ιε', καὶ ἀεὶ ὁμοίως.

Ἐπιδειχθείσης ἡμῖν τῆς τῶν σχέσεων πλάσεως ἁπλατῶν καὶ μικτῶν ἀπὸ ἰσότητος τὴν ἀρχὴν ἐσχηκυίας, καθόλικόν τι θεώρημα προσληπτέον χρήσιμον ἡμῖν ἐσόμενον εἰς τοὺς λόγους τῆς ἁρμονικῆς θεωρίας **[52]** τοιοῦτον.

ἕκαστον τῶν ἀπὸ μονάδος πολλαπλασίων ἢ οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ πρώτου καὶ ἀσυνθέτου τοσούτων ἐπιμορίων ἡγήσεται λόγων ἀντιπαρωνύμων ὁπόστος ἂν αὐτὸς ὢν τυγχάνῃ ἀπὸ μονάδος ἢ τοῦ πρώτου καὶ ἀσυνθέτου.

τῷ μὲν γὰρ καθ' ἕκαστον πρώτῳ πολλαπλασίῳ εἰς βάθος παρώνυμος εἷς ἐπιμόριος παραγραφήσεται, δευτέρῳ δὲ καθ' ἕκαστον δύο, τρίτῳ δὲ τρεῖς, τετάρτῳ τέσσαρες, καὶ ἑξῆς ἀκολούθως, ὥστε σύριγγι ὁμοίου τοῦ διαγράμματος γενομένου πολλὴν γλαφυρίαν ἐμφαίνεσθαι κατά τε τὸ μῆκος καὶ τὸ βάθος καὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

ἐκ μὲν γὰρ διπλασίων τριπλάσιοί τε καὶ ἡμιόλιοι φύσονται, ἐκ δὲ τριπλασίων τετραπλάσιοί τε καὶ ἐπίτριτοι, ἐκ δὲ τετραπλασίων πενταπλάσιοί τε καὶ ἐπιτέταρτοι, καὶ ἐφοσονοῦν ἀεὶ τῆς αὐτῆς ἀκολουθίας ἀποσῳζομένης.

ὁ δὲ συνεχὴς ἀεὶ πολλαπλάσιος ὑποφύσεται διὰ τῆς ὑποτεινούσης κωλυτὴρ γινόμενος τῶν περαιτέρω τῆς εἰρημένης τάξεως ἐπιμορίων ἐστερημένος τοιούτου ἐπιμορίου καθὸ λέγεται ὁ ἐπιμόριος, ὡς ὁ τρία ἡμίσους καὶ ὁ τέσσαρα τρίτου καὶ ὁ πέντε τετάρτου καὶ ἀεὶ ὁμοίως.

Wiederum aber werden sich auch gerade bei diesen Verhältnissen die Grundformen nach einem gewissen Verhältnis in schöner Ordnung darstellen; denn von der <Relation des> zweizweidrittelmal so großen der Drittel werden im fünften Teil der Unterschiede die Grundformen sichtbar werden, von der <Relation des> zweidreiviertelmal so großen der Viertel im siebten, von der <Relation des> des zweivierfünftelmal so großen der Fünftel im neunten, und immer, indem man zwei hinzufügt <5, 7, 9 usw.>, wird der Teil die Benennung haben, zum Beispiel 11, 13, 15 und so immer in gleicher Weise weiter.

Vorbereitungen für die Harmonielehre

Da wir nun die Bildung der einfachen und gemischten Relationen vorgeführt haben, die ihren Anfang von der Gleichheit nahm, müssen wir noch eine allgemeine Untersuchung hinzunehmen, die uns nützlich sein wird für die Verhältnisse der harmonischen Theorie, **[52]** und zwar eine Überlegung folgender Art:

Ein jedes der Vielfachen von der Eins an oder jedes Vielfache einer beliebigen Prim- und nicht zusammengesetzten Zahl wird ebenso viele, auf der anderen Seite entsprechend benannte überteilige Verhältnisse anführen, an wievielter Stelle es selbst von der Eins entfernt steht oder von der Prim- und nicht zusammengesetzten Zahl.

Denn man wird jeweils dem ersten Vielfachen nach unten <in der Tabelle> ein danach benanntes überteiliges <Verhältnis> beischreiben, jedem zweiten Vielfachen jeweils zwei, dem dritten drei, dem vierten vier und so in Reihe folgend, so dass das Schema einer Syrinx ähnelt und nach Länge und Tiefe und bei der Hypotenuse <=Diagonale> große Klarheit aufweist.

Denn aus den Doppelten werden Dreifache und Eineinhalbfache entstehen, aus den Dreifachen Vierfache und auch Eineindrittelfache, aus den Vierfachen werden Fünffache und Eineinviertelfache hervorgehen und so immer weiter, wobei stets dieselbe Folge beibehalten wird.

Das jeweils anschließende Vielfache wird aber unten entstehen und durch die Hypotenuse Überteilige verhindern, die über die genannte Ordnung hinausgehen, weil es ja eines solchen Überteiligen beraubt ist, nach dem das Überteilige benannt wird, wie zum Beispiel drei des Halben, vier des Drittels und fünf des Viertels und so immer weiter.

καθ' ἑκάστην δὲ σύριγγα ὁ κατὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τεταγμένος ἀριθμὸς πρὸς τοὺς ἑκατέρωθεν συγγενεῖς κατά τε τὸ πλάτος καὶ τὸ βάθος λόγον τινὰ ἀποσώσει οὐκ ἄτακτον, οἷον ἐν μὲν τῇ τῶν διπλασίων ἐκθέσει διπλάσιός τε καὶ ὑφημιόλιος γινόμενος, ἐν δὲ τῇ τῶν τριπλασίων τριπλάσιός τε καὶ ὑπεπίτριτος, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἀναλόγως.

Προληπτέον δὲ καὶ ἄλλο τι θεώρημα χρησιμώτατον ἡμῖν ἐσόμενον εἰς τὴν μουσικὴν εἰσαγωγὴν τοιοῦτον. **[53]** δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐὰν ἡ πρὸς ἀλλήλους διαφορὰ κατά τινας ἄλλους ἀριθμοὺς παρὰ μονάδα ἴσους ἀλλήλοις μετρῇ, τὸν μὲν μείζονα κατὰ τὸν μείζονα τὸν δὲ ἐλάττονα κατὰ τὸν ἐλάττονα, ἤτοι πληρούντως αὐτοὺς μετρήσει ἢ ὑπερβαλλόντως ἢ ἐλλιπῶς.

ἀλλ' ἐπεὶ τὸ μὲν πλῆρες ἑνὶ τρόπῳ πλῆρές ἐστιν, ὡς τὸ τέλειον καὶ τὸ ἴσον, κατὰ τὴν τῶν ἀρετῶν φύσιν, τὸ δὲ ἐλλιπὲς καὶ τὸ ὑπερβάλλον ἄπειρά τε καὶ ἀόριστα, καθὰ καὶ αἱ κακίαι, διὰ τὴν τῆς ἀνισότητος φύσιν, κατὰ μὲν τὴν πλήρη μέτρησιν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν οἱ μετρηθέντες λόγον ἕξουσι πρὸς ἐκείνους, καθ' οὓς ἐμέτρησεν αὐτοὺς ἡ διαφορά, καὶ ἔσται ὁ τούτων μείζων πρὸς τὸν ἐλάττονα, ὡς ὁ ἐκείνων μονάδι μείζων πρὸς τὸν μονάδι ἐλάττονα· κατὰ δὲ τὰς λοιπὰς δύο μετρήσεις ἢ μείζονα ἢ ἐλάττονα, καὶ οὐκέτι τὸν αὐτόν.

ἀλλ' εἰ μὲν ἐλλιπὴς ᾖ ἡ μέτρησις, ὥστε μετὰ τὴν τοῦ μέτρου προσβολὴν τοσαυτάκις καὶ οἱ πρὸ αὐτῶν ἀκαταμέτρητόν τι ἀπολειφθῆναι ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μετρηθεῖσιν, ἴσον δὲ τοῦτο, ἐν μείζονι πάντες οἱ ὅλοι λόγῳ γενήσονται ἤπερ τὰ ὑπὸ τοῦ μέτρου καταληφθέντα πληρούντως αὐτῶν μέρη πρὸς ἄλληλα ἐξεταζόμενα, καὶ καθόλου οἱ ἐνδοτέρω καὶ εἰς τὸ ἔλαττον κατὰ ἴσην διαφορὰν ὑποβιβαζόμενοι ἀριθμοὶ μείζονας ἀεὶ καὶ μᾶλλον λόγους ἕξουσιν τῶν ὑπὲρ αὐτοὺς μειζόνων, ὡς ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν μεσοτήτων πασῶν ἔστιν ἰδεῖν τοὺς ἐλάττονας ὅρους αἰεὶ ἐν μείζοσιν ὄντας λόγοις, τοὺς δὲ μείζονας ἐν ἐλάττοσιν·

Bei jeder Syrinx aber wird die Zahl, die am rechten Winkel angeordnet ist, gegenüber ihren Verwandten auf beiden Seiten nach der Breite <rechts> und nach der Tiefe <unten> hin ein bestimmtes wohlgeordnetes Verhältnis wahren, da sie zum Beispiel bei der Reihe der Zweifachen das Doppelte <2> und das eineinhalbmal Kleinere werden wird <3 : $1\frac{1}{2}$ = 2>, bei der Reihe aber der Dreifachen das Dreifache <3> und das eineindrittelmal Kleinere werden wird <4 : $1\frac{1}{3}$ = 3> und bei allen übrigen Zahlen in entsprechender Weise.

Man muss aber noch eine andere Untersuchung vorausnehmen, die uns von höchstem Nutzen für die Einführung in die Musik sein wird, und zwar folgende: **[53]** Wenn von zwei ungleichen Zahlen ihr Unterschied zueinander entsprechend gewissen anderen außer um eins einander gleiche Zahlen misst, und zwar die größere entsprechend der größeren und die kleinere entsprechend der kleineren, dann wird sie sie bestimmt entweder ganz messen oder im Übermaß <mit Rest> oder mangelhaft.

Da aber entsprechend der Natur der Tugenden das Ganze auf nur eine Art ganz ist (wie auch das Vollendete und das Gleiche), und das Mangelhafte und das Übermaß wie auch die Laster unendlich sind und unbegrenzt wegen der Natur der Ungleichheit, so werden entsprechend der vollkommenen Messung die gemessenen Zahlen ein und dasselbe Verhältnis gegenüber jenen Zahlen aufweisen, nach denen sie der Unterschied maß, und die größere Zahl von ihnen wird gegenüber der kleineren sich verhalten wie von jenen die um eins größere Zahl gegenüber der um eins kleineren Zahl; nach den beiden übrigen Messungen aber werden sie entweder ein größeres oder kleineres <Verhältnis> haben, niemals aber das gleiche <Verhältnis>.

Ergibt aber die Messung ein Ergebnis mit Mangel, so dass nach dem Anlegen des Maßes ebenso vielmal wie die Zahlen vor ihnen etwas Unmessbares bei beiden gemessenen <Zahlen> übrig bleibt, dieses aber gleich groß ist, dann werden alle ganzen Zahlen in einem Verhältnis erscheinen, das größer ist als ihre vom Maß erfassten Teile, die, gegeneinander gehalten, vollkommen <ohne Rest> messen; und überhaupt werden alle innerhalb und in Richtung zum Kleineren hin entsprechend dem gleichen Unterschied heruntergeführten Zahlen immer auch eher größere Verhältnisse haben als die größeren Zahlen über ihnen, wie man ja an allen arithmetischen Mitteln sehen kann, dass die kleineren Terme immer in größeren Verhältnissen sind, die größeren aber in kleineren.

ἐὰν δέ γε ὑπερβάλλουσα ᾖ ἡ μέτρησις, **[54]** ὥστε, καταμετρηθέντων ὑπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν διαφορᾶς τῶν ὅλων, κατὰ τὴν αὐτῶν ποσότητα ὑπερπαίειν ἴσῃ τινὶ ποσότητι τὸ μέτρον, ἐν ἐλάσσονι οἱ ὅλοι λόγῳ πρὸς ἀλλήλους ἔσονται ἤπερ οἱ τὴν ἴσην ὑπερέκπτωσιν τοῦ μέτρου ἐν ἀμφοῖν ὁρίζοντες.

ἔστω δὲ τῶν λεχθέντων τριῶν τρόπων ὑποδείγματα τρεῖς τινες αἵδε συζυγίαι· τῆς μὲν πλήρους μετρήσεως ἡ ν′ καὶ νε′, τῆς δ' ἐλλειπούσης ἡ μη′ καὶ νγ′, τῆς δὲ ὑπερβαλλούσης ἡ νγ′ καὶ [ἡ] νη′, κοινὴ δὲ διαφορὰ ἐν πάσαις ἡ πεντάς.

καθ' ἑκατέρων οὖν τῶν ἐν ἑκάστῃ συζυγίᾳ ὅρων μετροῦσα ἡ πεντὰς τοὺς μὲν μείζονας ἑνδεκάκις μετρήσει τοὺς δὲ ἐλάττονας δεκάκις. ἀλλ' ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ἴσους τοὺς λόγους ἕξουσιν οἵ τε ὅλοι καὶ οἱ καθ' οὓς ἐμετρήθησαν, εἴ γε οὗτοι μὲν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιδεκάτῳ λόγῳ ἔσονται.

<ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ μείζονα οἱ ὅλοι τῶν καθ' οὓς ἐμετρήθησαν· οἱ μὲν γὰρ ἐν τῷ ἐπιδεκάτῳ λόγῳ ἔσονται,> οἱ δ' ὅλοι οὐκέτι μὲν ἐν τῷ αὐτῷ, ἀλλ' ἐν μείζονι ἢ ἐπιδεκάτῳ· ὁ γὰρ νγ′ ἔχει τὸν μη′ καὶ μεῖζον ἢ τὸ δέκατον αὐτοῦ.

ἐν δὲ τῇ τρίτῃ ἐλάττονα οἱ ὅλοι τῶν καθ' οὓς ἐμετρήθησαν· οἱ μὲν γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιδεκάτῳ ἔσονται λόγῳ, οἱ δὲ ὅλοι <ἐν> ἐλάττονι ἢ ἐπιδεκάτῳ· ὁ γὰρ νη′ τοῦ νγ′ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ἐπιδέκατος, εἴ γε ἔχει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα καὶ ἔλαττον ἢ τὸ δέκατον αὐτοῦ.

ἐὰν δὲ ὅροις ἀνίσοις ἴσοι ἀριθμοὶ προστεθῶσιν, ἡ μὲν αὐτὴ ἔσται διαφορὰ τῶν τε **[55]** ἐξ ἀρχῆς καὶ τῶν μετὰ τῆς προσθέσεως, λόγον δὲ ἐλάττονα ἕξουσιν οἱ ὕστερον, τουτέστιν οἱ σὺν τῇ προσθέσει. κἂν ἀπὸ ἀνίσων δὲ ὅρων ἴση ἀφαίρεσις γένηται, οἱ ἐξ αὐτῶν λειπόμενοι ἀριθμοὶ τὴν αὐτὴν μὲν ἕξουσι διαφορὰν τοῖς ἐξ ἀρχῆς, ἐν μείζονι δὲ λόγῳ γενήσονται.

Ist aber die Messung überschießend, **[54]** so dass, wenn die ganzen Zahlen durch ihren gemeinsamen Unterschied gemessen sind, entsprechend ihrer Größe das Maß um eine gewisse gleiche Größe überschießt, dann werden die ganzen Zahlen im geringeren Verhältnis zueinander stehen als die Zahlen, die dasselbe Übersteigen des Maßes in beiden <Zahlen bzw. Größen> definieren.

Für die angeführten drei Arten sollen etwa die folgenden drei Verbindungen als Beispiele dienen: für die vollkommene Messung die <Verbindung> 50 und 55, für die mangelhafte die <Verbindung> 48 und 53 und für die überschießende die <Verbindung> 53 und 58; die gemeinsame Differenz aber beträgt bei allen drei Verbindungen fünf.

Wenn nun die Fünf jeweils beide Terme in jeder Verbindung misst, wird sie die größeren <Terme> elfmal messen, die kleineren aber zehnmal. In der ersten <Verbindung> nun werden aber sowohl die ganzen Zahlen <50 und 55> und die Zahlen, nach denen sie gemessen wurden <10 und 11>, die gleichen Verhältnisse haben <50 : 55 sind, mit 5 gemessen, = 10 : 11>, jedenfalls, wenn diese <10 und 11> in demselben Elfzehntelverhältnis stehen werden <11 : 10>.

Bei der zweiten <Verbindung> aber <48 : 53> wurden die ganzen Zahlen größer gemessen als die, nach denen man sie maß; die einen Zahlen nämlich werden im Elfzehntelverhältnis stehen <11 : 10>, die ganzen Zahlen jedoch werden nicht mehr im gleichen Verhältnis stehen, sondern in einem größeren als dem Elfzehntelverhältnis; enthält doch die Zahl 53 die 48 und dazu noch mehr als ein Zehntel von ihr <53 : 48 = 1,104>.

In der dritten Verbindung <53 : 58> aber wurden die ganzen Zahlen kleiner gemessen als die, nach denen man sie maß; die einen nämlich <10, 11 > werden im gleichen Elfzehntelverhältnis stehen, die ganzen Zahlen aber in einem kleineren als dem Elfzehntelverhältnis. Denn die Zahl 58 ist kleiner als die Zahl 53 plus ein Zehntel von 53, jedenfalls wenn die größere Zahl die kleinere Zahl und weniger als den zehnten Teil von ihr enthält <58 < 58,3>.

Wenn aber ungleichen Termen gleiche Zahlen beigefügt werden, dann wird der gleiche Unterschied **[55]** bestehen bleiben zwischen den anfangs gegebenen Zahlen und den Zahlen nach dieser Beifügung, doch werden die späteren Zahlen, das heißt die Zahlen mit der Beifügung, ein kleineres Verhältnis haben. Und wenn man von ungleichen Termen dieselbe Zahl abzieht, dann werden die davon übrigbleibenden Zahlen denselben Unterschied aufweisen wie die anfänglich gegebenen, doch werden sie in einem größeren Verhältnis entstehen.

Ἔτι κἀκεῖνο προληπτέον χρήσιμον ἡμῖν εἰς τὰ αὐτὰ ἐσόμενον· ὅτι ἐὰν διάστημα ὁτιοῦν δὶς συντεθῇ, τουτέστιν ὁστισοῦν λόγος διαφορηθῇ, διαμένοντος δηλονότι κοινοῦ τοῦ μέσου ὅρου, οἱ ἄκροι πάντως ἐν μείζονι λόγῳ ἔσονται ἤπερ οἱ ἁπλοῦν τὸ διάστημα περιέχοντες.

ἀλλ' ἐὰν μὲν τὸ διαφορούμενον διάστημα ἐν πολλαπλασίονι λόγῳ ᾖ, καὶ οἱ ἐμπεριέχοντες ἄκροι ἐν πολλαπλασίονι ἔσονται· ἐὰν δὲ ἐν ἐπιμορίῳ, οὔτ' ἐν ἐπιμορίῳ ἔσονται οἱ περιέχοντες οὔτ' ἐν πολλαπλασίῳ, ἀλλ' ἐν ἄλλῃ τινὶ σχέσει μικτῇ. ἔστιν οὖν καὶ ἀναστρέψαντα εἰπεῖν ὅτι ἐὰν σύνθετον διάστημα τοὺς ἄκρους ἔχῃ ἐν πολλαπλασίῳ λόγῳ ὄντας πρὸς ἀλλήλους, πάντως καὶ τὸ διαφορηθὲν διάστημα ἐν πολλαπλασίονι λόγῳ ἔσται·

ἐὰν δὲ μήτε πολλαπλάσιος ᾖ ὁ λόγος τῶν ἄκρων μήτε ἐπιμόριος, μικτὸς δέ τις, τὸ διαφορηθὲν διάστημα πολλαπλάσιον μὲν οὐκ ἔσται, ἐπιμόριον δὲ ἢ ἑτερογενές.

ἀφ' οὗ βεβαιωθήσεται ἐν τοῖς ἁρμονικοῖς λόγοις τίνα μὲν σύμφωνα διαστήματα συμφώνοις συντιθέμενα μείζους συμφωνίας ἀποτελέσει, τίνα δὲ οὐχί, καὶ ἐν τίνι λόγῳ εἰσὶν αἱ ἀποτελούμεναι σύνθετοι, καὶ ἐν τίνι <αἱ> ἐξ ἀρχῆς. Ἔτι κἀκεῖνο προληπτέον, ὅτι ἀριθμὸς ἀριθμὸν ἕτε**[56]**ρον πολλαπλασιάσας τὸν ἀπογεννώμενον ἔχοντα παρέξει ἑκατέρου τῶν γεννησάντων τὰ ἰδιώματα.

καὶ ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τινὶ ὄντες ἑτέρους δύο μηκύνωσιν ἐν ἄλλῳ λόγῳ μηκύνοντας, ὁ μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, ἀνάγκη τοὺς ἐξ αὐτῶν γεννωμένους ἀποσῶσαι ἑκάτερον τὸν λόγον·

καὶ ἐὰν μὲν πυθμενικοὶ ὦσιν οἱ γεννήτορες, πυθμενικὴ καὶ ἡ λῆξις τῶν λεγομένων ἐν τοῖς ἀπογεννωμένοις συμβήσεται, εἰ δὲ μὴ πυθμένες εἶεν, τὴν αὐτὴν ἀποσώσουσιν ἀναλογίαν τῆς τάξεως.

Wir müssen auch noch folgendes vorwegnehmen, was uns zum gleichen Zweck <Einführung in die Musik> nützlich sein wird: Wenn irgendein Intervall zweimal zusammengesetzt wird, das heißt, jedes beliebige Verhältnis zerlegt wird, wobei selbstverständlich der gemeinsame mittlere Term erhalten bleibt, dann werden die Außenglieder grundsätzlich in einem größeren Verhältnis stehen als die Terme, die das einfache Intervall umfassen.

Steht aber das zerlegte Intervall im Verhältnis eines Vielfachen, dann werden auch die umfassenden Außenglieder im Verhältnis des Vielfachen stehen. Sind sie aber im überteiligen Verhältnis, werden die Außenglieder weder im überteiligen Verhältnis noch im Verhältnis des Vielfachen stehen, sondern in irgendeiner anderen gemischten Relation. Man kann dies nun auch umkehren und kann sagen: Wenn in einem zusammengesetzten Intervall die Außenglieder im Verhältnis des Vielfachen zueinander stehen, dann wird grundsätzlich auch das zerlegte Intervall im Verhältnis des Vielfachen stehen.

Stellt aber das Verhältnis der Außenglieder weder ein Vielfaches noch ein Überteiliges dar, sondern liegt ein irgendwie gemischtes Verhältnis vor, dann wird das zerlegte Intervall nicht ein Vielfaches sein, sondern entweder ein Überteiliges sein oder aber von einer anderen Gattung.

Dadurch wird in den harmonischen Verhältnissen bestätigt, dass manche zusammenklingenden Intervalle, wenn man sie zu zusammenklingende stellt, größere Zusammenklänge erzeugen, manche aber nicht, und in einem bestimmten Verhältnis sind die hergestellten Harmonien zusammengesetzt, und in einem anderen sind sie von Anfang an vorhanden. Auch folgendes ist noch vorwegzunehmen, dass eine Zahl, die eine andere Zahl **[56]** vervielfacht, bewirken wird, dass die entstehende Zahl <das Produkt> die besonderen Qualitäten jedes der beiden Faktoren vorweisen wird.

Und wenn zwei Zahlen, die in einem bestimmten Verhältnis stehen, zwei andere Zahlen multiplizieren, die in einem anderen Verhältnis stehen, und zwar die größere Zahl die größere und die kleinere Zahl die kleinere, dann müssen notwendigerweise die aus ihnen entstehenden Produkte beide Verhältnisse beibehalten.

Und wenn die erzeugenden Zahlen Grundformen sind, dann wird auch das Ergebnis der Genannten in den Produkten Grundform sein; sind sie aber keine Grundform, dann werden sie dieselbe Proportion ihrer Ordnung bewahren.

Ὁμοίως κἀκεῖνο προληπτέον· πάντες οἱ ὅροι κατ' ἀρτίαν ἔκθεσιν ἐκκείμενοι κατ' ἴσην ὑπεροχήν, εἴτε τῆς ἀρτίας φύσεως εἶεν εἴτε τῆς περισσῆς εἴτε καὶ ἑκατέρας, τοσουτοπλάσιον τὸ ἐκ τῆς ἐπισυνθέσεως πάντων τῶν ἐκκειμένων ὅρων ἀποτελοῦσι τοῦ ἐκ μόνων τῶν ἄκρων, ὅσονπερ τοῦ πλήθους τῶν ὅρων ἥμισυ ὑπάρχει, ἀφ' οὗ παρωνυμήσει ἡ πολλαπλασιότης.

Ἀκόλουθον τούτοις τὸν περὶ ἀναλογιῶν ὄντα τόπον, ὅτι σύστημα λόγων ἐστὶν ἡ ἀναλογία, τὸ παρὸν ὑπερθέμενοι, πρότερον τὸν περὶ ἐπιπέδων καὶ στερεῶν ἐπελευσόμεθα, ἴδιον ὄντα τοῦ καθ' αὑτὸ ποσοῦ καὶ διὰ τὸ χρήσιμον τῆς διδασκαλίας ὑπέρθεσιν λαβόντα.

Ἐπειδὰν τοίνυν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ὁστισοῦν ἤτοι καθ' αὑτὸν ἢ καὶ ἐπισυντιθέμενος τοῖς πρὸ αὐτοῦ εἰς μονάδας ἀναλύηται καὶ κατὰ γραμμὴν ἐπεκτείνηται, εὐθυγραμμικὸς κεκλήσεται, διότι ἀπλατῶς ἐπὶ μόνον τὸ μῆκος πρόεισιν· ἰστέον γὰρ ὡς τὸ παλαιὸν **[57]** φυσικώτερον οἱ πρόσθεν ἐσημαίνοντο τὰς τοῦ ἀριθμοῦ ποσότητας ἀναλύοντες εἰς μονάδας, ἀλλ' οὐχ ὥσπερ οἱ νῦν συμβολικῶς.

ἰδίως δὲ εὐθυγραμμικοὶ καλοῦνται οἱ διάγραμμα ἐπίπεδον μὴ ποιοῦντες, ὡς ὁ ε' καὶ ὁ ζ' καὶ οἱ ὅμοιοι· εὐθυμετρικοὶ δὲ καλοῦνται διὰ τὸ κατ' εὐθεῖαν μετρεῖσθαι ὑπὸ μονάδος.

καὶ ἐπειδὴ ἀρχή ἐστι καὶ στοιχεῖον μήκους ἡ στιγμή, ἧσπερ ῥύσιν φασὶν εἶναι οἱ γεωμέτραι τὴν γραμμήν, ἕξει καὶ ἡ μονὰς καθ' ὁμοιότητα στιγμῆς καὶ σημείου λόγον, ὡς ἂν ἀρχὴ οὖσα ποσοῦ καὶ δὴ καὶ ἀφ' ἑαυτῆς ὡσανεὶ ῥυεῖσα καὶ κατὰ τὸ ἑαυτῆς μέγεθος ἐφ' ἓν διαστᾶσα, εἰς μῆκος προελεύσηται.

οὕτως καὶ συμβεβηκότα τινὰ ἕξει κοινὰ πρὸς τὸ σημεῖον τό τε ἀρχὴ εἶναι ποσοῦ, ὡς ἐκεῖνο πηλίκου, καὶ τὸ ἀμερὴς εἶναι, ὡς ἐκεῖνο, καὶ τὸ δύνασθαι μηδὲν πλέον ἑαυτῆς, καθὰ κἀκεῖνο·

In gleicher Weise ist auch folgendes vorwegzunehmen: Alle Terme, die in gerader Reihe in gleichem Abstand nach oben stehen, mögen sie nun von gerader Natur sein oder von ungerader oder auch von beider Art, ergeben das Ebensovielmale der Summe aller vorhandenen Terme im Vergleich zur Summe der Außenglieder allein, wievielmal die Hälfte der Anzahl der Terme beträgt, wovon das Vielfache seinen Namen bekommen wird.

In den nun folgenden Darlegungen müssten wir das Gebiet der Proportionen behandeln (weil die Proportion ein System von Verhältnissen ist), doch übergehen wir es gegenwärtig und wollen zuerst das Gebiet der Flächen und Körper behandeln, das ein eigenes Gebiet der Quantität für sich ist und wegen des Nutzens der Lehre den Vorzug verdient.

3. Zahlen im geometrischen Kontext, insbesondere figurierte Zahlen und geometrisch deutbare Produkte von Zahlen

Da nun jede beliebige Zahl von der Eins an entweder für sich oder zusammengesetzt mit den Zahlen vor ihr in Einheiten aufgelöst wird und sich linear ausdehnt, wird sie "geradlinig" genannt werden, weil sie ohne Breite nur in der Länge voranschreitet. Man muss nämlich wissen, dass früher **[57]** die Alten die Quantitäten der Zahlen mehr der Natur entsprechend dadurch bezeichneten, dass sie sie in Einheiten auflösten, und nicht wie die Heutigen durch Zeichen.

Im eigentlichen Sinne geradlinig aber heißen die Zahlen, die keine Flächenfigur bilden wie etwa die 5 und die 7 und ähnliche. Linear heißen sie aber, weil sie von der Eins in gerader Linie gemessen werden.

Und weil der Punkt Anfang und Element der Länge ist, als dessen "Fließen" die Geometer die Linie bezeichnen, wird auch die Eins entsprechend ihrer Ähnlichkeit mit dem Punkt auch die Bedeutung eines Punktes haben, weil sie ja der Anfang der Quantität ist, und wird also auch, sozusagen von sich selbst weg fließend und, entsprechend ihrer eigenen Größe jeweils den Abstand Eins einhaltend, zur Länge voranschreiten.

Auf diese Weise wird die Eins auch gewisse Bestimmungen mit dem Punkt gemeinsam haben, nämlich Anfang der Quantität zu sein (wie der Punkt Anfang der geometrischen Größe ist), auch: unteilbar zu sein (wie der Punkt) und die Eigenschaft, in der Potenz nicht mehr zu sein als sie selbst (wie auch der Punkt).

ὡς γὰρ ἅπαξ ἓν οὐδὲν πλέον τοῦ ἕν, οὕτως ἐπ' ἄλληλα σημεῖα γινόμενα οὐδὲν πλέον σημείου ποιεῖ· οὐδὲ γάρ ἐστιν ἡ γραμμὴ πλειόνων σύνθεσις σημείων, ἀλλ' ἤτοι ψαυστῶν ἀδιαστασία ἔσται ἢ διαστάντων ἀψαυστία, ὥστ' οὐκέτι μέρος γραμμῆς τὸ σημεῖον·

οὐ γὰρ μόνον σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐδέν, ἀλλὰ καὶ οὐδ' ἄλλου τινός ἐστι μέρος.[17] κοινὸν δὲ ἔχει πρὸς τὸ σημεῖον ἡ μονὰς καὶ τὸ στερεῶν πυραμίδων ἀπειρογόνων ταῖς βάσεσιν ἐπὶ κορυφῇ θεωρουμένη ὡς ἐκεῖνο πανσχήμων νοεῖσθαι.

ἴδια δὲ ἤδη ἔχει, καθὰ διαφέρει σημείου, ὡσανεὶ ὁρογενὴς οὖσα, τό τε κατὰ σύνθεσιν ἑαυτῆς εἰς μῆκος διίστασθαι καὶ ἔτι τὸ μέρος εἶναι τούτου.

εἰ δὲ τῆς ἐφ' ἓν διαστάσεως παυσαίμεθα καταγράφοντες τὰς μονάδας καὶ ἐπεκβάλ**[58]**λοντες τὸ μῆκος, ἐπὶ δὲ τὸ πλάτος ἐπέλθοιμεν κατ' ἐπίπεδον σχηματίζοντες αὐτάς, ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς ἐπίπεδος κεκλήσεται· διχῇ γὰρ ἤδη διαστατὸς καὶ ποικίλλεται εἴδεσι καταγραφόμενος, ἀρχόμενος περὶ τριγώνου, περὶ ὧν ἐν κεφαλαίῳ οὕτως ἐφοδευτέον καὶ ποριστέον αὐτῶν εὔτακτον γένεσιν.

Ἐκκειμένου γὰρ τοῦ ἐφεξῆς ἀπὸ μονάδος ἀριθμοῦ, ἐὰν μὲν μηδὲν διαλιπόντες σωρηδὸν συντιθῶμεν αἰεὶ τοὺς ἐφεξῆς καθ' ἕνα, οἷον ἕνα πρῶτον, εἶτ' ἐπὶ τούτῳ δύο, εἶτα ἐπὶ τοῖς δυσὶ τρία καὶ πρὸς τούτοις τέσσαρα καὶ μέχρις οὗ βουλόμεθα, τρίγωνοι ἐφεξῆς ἀπὸ μονάδος ἀποτελεσθήσονται οἱ α′ γ′ ϛ′ ι′ ιε′ κα′ κη′ λϛ′ καὶ ἐφεξῆς, ὧν ἕκαστος σχηματισθήσεται ἀναλυθεὶς εἰς μονάδας τριγώνου τρόπον, καὶ αὐτὴ δὲ καθ' ἑαυτὴν ἡ μονὰς ὡς δυνάμει οὖσα τριγωνική.

τὰς δὲ πλευρὰς ἕκαστος τῶν μετὰ μονάδα τοσούτων ἕξει μονάδων, ὅσωνπερ καὶ ὁ γνώμων ἐστίν, ἢ νὴ Δία ὅσωνπερ μονάδων ὁ ὕστατος παραληφθεὶς ἐν τῇ ἐπισυνθέσει γνώμων ἐστίν, ὅπερ ἴδιον μόνων τριγώνων ἐστίν.

εἴρηται δὲ γνώμων ὁ αὐξητικὸς ἑκάστου εἴδους τῶν πολυγώνων κατὰ πρόσθεσιν τὸ αὐτὸ εἶδος διαφυλάττων, ὡς φέρε εἰπεῖν τῷ τρία τριγώνῳ ὄντι περιτεθεῖσα ἡ τριὰς τὸ αὐτὸ εἶδος ἔχοντα τὸν ἐπίσημον ἀπετέλεσε. μετῆκται δὲ ἀπὸ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ τὸ ὄνομα· λέγεται γὰρ ἡ ὑπεροχὴ ἥπερ ἔχει τετράγωνον τετραγώνου γνώμων.

---

[17] Euklid, Elemente I, Def. 1

Wie nämlich einmal eins nicht mehr ist als eins, so ergeben Punkte, die beieinander liegen, nicht mehr als einen Punkt; ist doch die Linie nicht die Zusammensetzung mehrerer Punkte, sondern sie wird entweder Stetigkeit von berührten <Punkten> oder eine Nichtberührung auseinander tretender Punkte sein, so dass der Punkt nicht mehr Teil einer Linie ist.

Denn nicht nur ist ein Punkt das, was kein Teil hat, sondern auch das, was nicht Teil eines anderen ist. Gemeinsam aber hat die Eins mit dem Punkt auch die Eigenschaft, dass sie, an der Spitze räumlicher Pyramiden mit unendlich vielen Basiswinkeln betrachtet, wie jener als allgestaltig aufgefasst wird.

Als eigentümliche Eigenschaften aber hat die Eins nun (und darin unterscheidet sie sich vom Punkt), dass sie sozusagen auf der Grenze geboren ist und in der Zusammensetzung mit sich selbst zur Länge auseinander tritt und dazu noch, dass sie einen Teil dieser Länge darstellt.

Wenn wir aber mit dem regelmäßigen Abstand der Zahlen von jeweils Eins beim Hinschreiben der Einsen aufhören und nicht mehr **[58]** die lineare Eindimensionalität erzeugen, sondern zur Fläche kommen, indem wir die Einheiten flächig anordnen, dann wird eine solche Zahl Flächenzahl genannt. Denn diese Zahl tritt nun in zweifachem Abstand auf und wird auch in verschiedenen Formen aufgezeichnet (angefangen mit dem Dreieck), bei denen man im Ganzen so vorgehen und ihre Entstehung in guter Ordnung so gewinnen muss.

Wenn wir nämlich die Zahlen in Reihe von eins an aufstellen, keine auslassen und sie in arithmetischer Folge der Reihe nach von der Eins ab einzeln summieren, zum Beispiel zuerst die Eins, dann mit ihr die Zwei, dann über die Zwei die Drei und dazu die Vier und immer weiter, so lange wir wollen, dann werden der Reihe nach von der Eins an Dreieckzahlen herauskommen, nämlich 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 und so weiter der Reihe nach, von denen jede figürlich als Dreieck dargestellt werden kann, wobei man sie in Einheiten auflöst, und sogar die Eins kann, für sich allein betrachtet, sich potentiell als dreieckig darstellen.

Jede Dreieckszahl nach der Eins wird aber Seitenlängen von ebenso viel Einheiten haben, wie viel auch der Gnomon hat, oder bestimmt ebenso viele Einheiten, wie viele auch der letzte Gnomon hat, der in die Summierung hineingenommen wurde, und dies ist eine Eigenheit, die nur Dreiecke besitzen.

Als Gnomon aber hat man die Zahl bezeichnet, durch deren Beifügung jede Figur der Vielecke vermehrt, aber dieselbe Figur erhalten bleibt, wie zum Beispiel die Zahl drei, die ein Dreieck bildet, und der Drei, hinzugefügt, eine Prägung <Figur> derselben Gestalt hervorbrachte. Die Bezeichnung ist aber aus der Geometrie übernommen; dort nämlich wird das Hinausragen, das ein Quadrat über ein anderes Quadrat aufweist, als "Gnomon" bezeichnet.

πάντως δὲ ἡ σχημάτισις κατ' ἰσόπλευρον ἔσται τρίγωνον· ὥστε τρίγωνος ἂν εἴη ἀριθμὸς ὁ <ἐκ> τῶν ἀπὸ μονάδος κατὰ **[59]** μονάδος διαφορὰν συντιθεμένων σωρηδὸν ἀπογεννώμενος.

ἐν δὲ τῇ ἐπιπεδώσει ἄρξεται ὁ τέταρτος ἐναπολαμβάνειν τὸν πρῶτον, ὁ δὲ πέμπτος τὸν δεύτερον καὶ ἀκολούθως οἱ ἄλλοι, μέχρις οὗ πάλιν ὁ ἕβδομος τὸν πρῶτον περιέχοντα περισχῇ διὰ τὸ εἶναι καὶ αὐτὸς τέταρτος ἀπὸ τοῦ τετάρτου, καὶ οἱ ἑξῆς δὲ ἀναλόγως τὸ αὐτὸ ποιήσουσι.

Πάλιν δὲ ἐξ ἄλλης ἀρχῆς ἐὰν ἐκ τοῦ ἐφεξῆς ἀριθμοῦ ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι συντιθῶμεν σωρηδὸν μηκέτι τοὺς ἐφεξῆς ἀλλὰ τοὺς παρ' ἕνα, τουτέστι τοὺς περισσούς, οἷον α', εἶτα α' γ', εἶτα α' γ' ε', καὶ πάλιν α' γ' ε' ζ' καὶ ἐφεξῆς ἀκολούθως, τετράγωνοι φύσονται καὶ ἐπιπεδωθήσονται τετραγωνικῶς ἀναλυθέντες εἰς μονάδας.

οἱ δὲ γνώμονες γωνίαν ποιοῦντες ἀεὶ περιτεθήσονται καὶ οὐκέτι κατὰ μίαν πλευρὰν αὐξηθήσονται οἱ τετράγωνοι, ὥσπερ ἐπὶ τῶν πρὸ αὐτῶν ἐγένετο.

ἄρξεται δὲ πάλιν κἀνταῦθα ὁ τρίτος ἐμπεριέχειν τὸν πρῶτον καὶ ὁ τέταρτος τὸν δεύτερον καὶ ὁ πέμπτος τὸν τρίτον ἀλλὰ καὶ τὸν πρῶτον, ἕκτος δὲ τέταρτον καὶ δεύτερον, καὶ καθόλου οἱ ἀρτιοταγεῖς ἀρτίους καὶ οἱ περισσοταγεῖς περισσούς.

ἔστιν οὖν τετραγωνικὸς ἀριθμὸς ὁ ἐκ τῶν ἀπὸ μονάδος δυάδι διαφερόντων συντιθεμένων ἀποτελούμενος, ὡς α' δ' θ' ις' κε' λς' καὶ ὁ ἐφεξῆς ἕκαστος πάλιν ἔχων τοσούτων μονάδων τὴν πλευράν, ὅσουσπερ καὶ τοὺς ἐν τῇ συνθέσει παραληφθέντας γνώμονας.

ἐπεὶ δὲ τὸ τετράγωνον σχῆμα ἐν γραμμικοῖς διαγωνίου ἀχθείσης εἰς δύο τρίγωνα λύεται, δῆλον δ' ὅτι καὶ συνίσταται **[60]** ἐκ τούτων, εὕροιμεν ἂν καὶ ἐν ἀριθμητικοῖς ἐκ πάντων δύο τριγώνων ἀριθμῶν συνεχῶν τετράγωνον συνιστάμενον. γεννῶνται δ' οἱ τετράγωνοι καὶ ἑκάστου τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος· ἡ μὲν γὰρ μονὰς ἑαυτὴν μονάσασα τετραγωνικὴ γίνεται, ἡ δὲ δυὰς ἑαυτὴν δυάσασα τετράγωνον τὸν δ' ποιεῖ καὶ ἡ τριὰς ἑαυτὴν τριάσασα τὸν θ' καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

Die Figur mit gleichen Seiten wird aber durchaus ein Dreieck sein, so dass eine Dreieckszahl eine Zahl ist, die entsteht, wenn man von der Eins ausgeht und mit **[59]** dem Unterschied Eins die jeweils zweiten Zahlen hinzuaddiert.

Stellt man sie jedoch als Flächenfiguren dar, wird die vierte Zahl beginnen, die erste einzuschließen, die fünfte Zahl die zweite und so folgend die anderen, bis wiederum die siebte Zahl die erste einschließende Zahl einschließt <4>, weil auch sie selbst die vierte Zahl nach der vierten ist, und die folgenden Zahlen werden analog dazu dasselbe tun.

Indem wir aber wieder von einem anderen Ausgangspunkt ausgehen und mit der Zahl beginnen, die unmittelbar nach der Eins kommt, wollen wir die jeweils folgenden Zahlen nicht mehr in arithmetischer Folge zusammenstellen, sondern die jeweils zweiten, das heißt die ungeraden Zahlen, wie zum Beispiel 1, dann 1, 3, dann 1, 3, 5 und wiederum 1, 3, 5, 7 und so in Folge weiter; dann werden Quadratzahlen entstehen, und sie werden in Quadratform als Flächen dargestellt, wenn sie in Einheiten aufgelöst werden.

Ihre Gnomone aber, die einen rechten Winkel bilden werden stets darum angelegt, und die Quadrate werden nicht mehr nur an einer Seite wachsen, wie es bei den <Dreiecken> vor ihnen der Fall war.

Auch hier wird aber wieder anfangs die dritte Zahl die erste umfassen, die vierte Zahl die zweite und die fünfte Zahl die dritte, aber auch die erste, und die sechste Zahl umfasst die vierte und die zweite, und überhaupt die Zahlen an gerader Stelle die geraden und die Zahlen an ungerader Stelle die ungeraden.

So ist nun eine Quadratzahl die Zahl, die entsteht, wenn man die Zahlen addiert, die von der Eins an immer um die Zahl zwei erweitert sind, wie zum Beispiel 1, 4, 9, 16, 25, 36 <also: 1 + (1 + 2) = 1 + 3 = 4; 1 + 3 + 5 = 9; 1 + 3 + 5 + 7 = 16>, und so in der Reihe jede Zahl, die wieder eine Seite von so viel Einheiten hat, wie viel sie auch Gnomone hat, die bei der Zusammensetzung einbegriffen wurden.

Da sich aber die Figur eines Quadrates, wenn man in der Geometrie die Diagonale zieht, in zwei Dreiecke auflösen lässt und es klar ist, dass es **[60]** aus diesen <Dreiecken> auch zusammengesetzt ist, werden wir wohl auch in der Arithmetik finden, dass die Quadratzahl immer aus zwei Dreieckzahlen unmittelbar nebeneinander besteht <z.B. 1 + 3 = 4; 3 + 6 = 9; 6 + 10 = 16; 10 + 15 = 25 usw.>. Die Quadratzahlen aber entstehen auch, wenn jede Zahl von der Eins an sich selbst multipliziert; wird doch die Eins, wenn sie sich mit sich selbst multipliziert, quadratisch, die Zwei aber, wenn sie sich mit zwei multipliziert, bildet die Quadratzahl vier, und die Drei, wenn sie sich selbst verdreifacht, bildet die 9 und so der Reihe nach in Folge.

᾿Εὰν δὲ πάλιν ἐκ τοῦ ἐφεξῆς ἀριθμοῦ τοὺς δύο διαλείποντας τῇ μονάδι σωρηδὸν ἐπισυνθῶμεν, πεντάγωνοι φύσονται οἱ α′ ε′ ιβ′ κβ′ λε′ καὶ ἐφεξῆς, καὶ αὐτοὶ ἀναλυόμενοι εἰς μονάδας καὶ πενταγωνικῶς σχηματιζόμενοι κατὰ τὰς τρεῖς πλευρὰς περιτιθεμένων τῶν γνωμόνων. πάλιν δὲ τοσούτων μονάδων ἔσται ἡ πλευρὰ ἑκάστου, ὅσοιπερ καὶ γνώμονες εἰς τὴν γένεσιν αὐτοῦ συνετέθησαν.

ἔσται οὖν πενταγωνικὸς ἀριθμὸς ὁ ἐκ τῶν ἀπὸ μονάδος τριάδι διαφερόντων συντιθεμένων ἀποτελούμενος, ἑξαγωνικὸς δὲ ὁ ἐκ τῶν ἀπὸ μονάδος τετράδι διαφερόντων, καὶ ἑπταγωνικὸς ὁ <ἐκ> τῶν πεντάδι καὶ ἑξῆς ἀκολούθως, καὶ κατὰ δυάδος ὑπεροχὴν τῶν πολυγώνων πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν γνωμόνων τὴν ὀνομασίαν ἰσχόντων.

εἰ δέ τις ἐκθοῖτο στιχηδὸν ἐφεξῆς τοὺς πολυγώνους ἀπὸ τριγώνου προτάξας αὐτῶν καὶ τὸν συνεχῆ ἀριθμόν, φανήσονται ἐν τῷ διαγράμματι τρίγωνοι μὲν δύο παρὰ δύο ἄρτιοι καὶ περισσοὶ ὄντες, τετράγωνοι δὲ εἷς παρ' ἕνα, πεντάγωνοι δὲ ὁμοίως τοῖς τριγώνοις δύο παρὰ δύο, καὶ ὅλως οἱ ὁμοταγεῖς αὐτῶν, τουτέστιν *** ἀρτιοταγεῖς. **[61]**

καὶ γὰρ γνωμόνων ἔτυχον ἅπαντες οἱ πολύγωνοι κατά τινα φυσικὴν εὐταξίαν, τρίγωνος μὲν ἑνὸς παρ' ἕνα περισσοῦ καὶ ἀρτίου, τετράγωνος δὲ περισσῶν μόνων, πεντάγωνος δὲ ἑνὸς πάλιν παρ' ἕνα καὶ ἑξάγωνος περισσῶν μόνων, καὶ τοῦτο δι' ὅλου ἀκολούθως.

᾿Επεὶ δὲ ἡ μονὰς πάσης γενέσεως τῶν πολυγώνων ἀφηγεῖται καὶ διὰ τοῦτο πανσχήμων ἐστίν, ἐοικέναι λέγεται τοῦτο κύκλῳ καὶ σφαίρᾳ, διότι τε ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς ὁ κύκλος περιέχεται καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ἡ σφαῖρα καὶ διότι ὅ τε κύκλος χωρητικός ἐστι καὶ περικλειστικὸς παντὸς πολυγώνου ἐπιπέδου σχήματος καὶ ἡ σφαῖρα στερεοῦ.

Wenn wir aber wiederum aus der Zahlenreihe in Folge <1, 2, 3, 4, 5, 6 usw.> immer zwei Zahlen auslassen und (die übriggebliebenen) kumulativ zu der Eins addieren, werden fünfeckige Zahlen entstehen, nämlich 1, 5, 12, 22, 35 und so weiter <1 (2 und 3 weggelassen) + 4 = 5; 1 + 4 (5 und 6 weggelassen) + 7 = 12; 1 + 4 + 7 (8 und 9 weggelassen) + 10 = 22; 1 + 4 + 7 + 10 (11 und 12 weggelassen) + 13 = 35; die Reihe mit den weggelassenen Zahlen ist: 1 (2, 3) 4 (5, 6) 7 (8, 9) 10 (11, 12) usw.>; und auch diese lassen sich in Einheiten auflösen und in Fünfeckform darstellen, wobei an den drei Seiten die Gnomone herumgelegt werden. Wiederum aber wird die Seite eines jeden aus so vielen Einheiten bestehen, wie viele Gnomone zu seiner Entstehung zusammengesetzt wurden.

Also wird die Fünfeckzahl die sein, die entsteht, wenn man von der Eins ausgehend die Zahlen mit der Differenz drei hinzuaddiert <z.B.: 1, 4, 7, 10, 13, 16 usw.> Die Sechseckzahl aber wird entstehen, wenn man die Zahlen mit der Differenz vier von der Eins an addiert <also 1, 5, 9, 13, 17, 21 usw.>, und die Siebeneckzahl entsteht aus den Zahlen mit der Differenz fünf von der Eins an <z.B. 1, 6, 11, 16 usw.> und so weiter in Folge, wobei die Vielecke ihre Benennung entsprechend der um zwei größeren Zahl gegenüber der Differenz der Gnomone bekommen <5 = 3 + 2; 6 = 4 + 2; 7 = 5 + 2>.

Wenn aber jemand die Vieleckzahlen in Reihen nacheinander von der Dreieckzahl an hinstellte und auch die anschließende Zahl voranstellte <also: Dreieckzahlen, Viereckzahlen, Fünfeckzahlen usw.>, dann werden in der Tabelle <immer> zwei gerade Dreieckzahlen neben zwei ungeraden Dreieckzahlen erscheinen; die Viereckzahlen aber abwechselnd als eine ungerade neben einer geraden; die Fünfeckzahlen aber wie die Dreieckzahlen: zwei ungerade neben zwei geraden, und überhaupt die unter ihnen gleichgeordneten, ... das heißt **[61]** an gerader Stelle.

Denn alle Vielecke haben entsprechend einer natürlichen schönen Ordnung folgende Gnomone: Das Dreieck abwechselnd einen ungeraden neben einem geraden, das Viereck aber nur ungerade, das Fünfeck aber wiederum einen <geraden> neben dem anderen <ungeraden>, das Sechseck nur ungerade, und so durchgehend in Folge.

Da aber die Eins zu Beginn jeglicher Entstehung der Vielecke steht und deshalb alle Figuren in sich birgt, sagt man, dieses Gebilde gleiche einem Kreis und einer Kugel, weil der Kreis von einer einzigen Linie eingefasst wird und die Kugel von einer einzigen Ebene und weil der Kreis auch fähig ist, jede ebene Vieleckform zu umfassen und einzuschließen und die Kugel alle räumlichen Figuren.

φανήσεται δὲ καὶ ἑξῆς καὶ τῶν στερεῶν σχημάτων τῆς γενέσεως ἀφηγουμένη ἡ μονὰς καὶ δυνάμει ἐπιδεχομένη τοὺς πάντων λόγους, πρὸς τούτοις τε ὅτι ἀφ' ἑαυτῆς καὶ περὶ ἑαυτὴν ὡσανεὶ κινηθεῖσα εἰς ἑαυτὴν ἀποκαθίσταται, καθὰ καὶ ὁ κύκλος ἀπό τινος περί τι ἐξ ἴσου διαστήματος εἰς ταὐτὸν ἀποκαθίσταται. εἰ δὲ ὁ κυκλικὸς λόγος τῇ μονάδι ἐμφαίνεται ἄρχονται δὲ ἐπὶ τριάδος αἱ σχηματίσεις τῶν πολυγώνων, τὴν δυάδα εὐλόγως οἱ ἀπὸ Πυθαγόρου ἀόριστον ἔφασαν εἶναι, διότι καθ' αὑτὴν οὐδ' ὁτιοῦν περιορίζεται σχῆμα· πρῶτον γὰρ εὐθύγραμμον καὶ στοιχεῖον ἐπίπεδον τὸ τρίγωνον, διότι ἐν τρισὶν ὅροις τὸ διχῇ διαστατόν.

καὶ ἐπειδὴ ἐν γραμμικοῖς εἰδοποιεῖται τὰ πολύγωνα ὑπὸ τριγώνου, εἴ γε τὴν σύστασιν ἀπ' αὐτοῦ καὶ εἰς αὐτὸ τὴν ἀνάλυσιν ἴσχει, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἐν ἀριθμοῖς εἰδοποιηθήσονται οἱ **[62]** πολυγώνιοι ὑπὸ τῶν τριγώνων κατά τινα φυσικὴν εὐταξίαν.

ἔσται γὰρ ὁ δυνάμει τρίγωνος ἡ μονὰς διαφορὰ τῶν ἐνεργείᾳ πρώτων πολυγώνων ἐπὶ βάθος θεωρουμένων τῶν γʹ δʹ εʹ ϛʹ ζʹ ηʹ θʹ ιʹ καὶ ἐφεξῆς, ὁ δὲ ἐνεργείᾳ πρῶτος τρίγωνος ὁ τρία, τῇ δὲ τάξει δεύτερος, τῶν δευτέρων πολυγώνων ἔσται διαφορὰ τῶν ϛʹ θʹ ιβʹ ιεʹ ιηʹ καʹ κδʹ κζʹ, ὁ δὲ τρίτος ὁ ϛʹ τῶν τριγώνων περίεισιν ιʹ ιϛʹ κβʹ κηʹ λδʹ μʹ μϛʹ νβʹ, καὶ πάλιν ὁ τέταρτος τῶν τετάρτων καὶ ὁ πέμπτος τῶν πέμπτων καὶ ἐφοσονοῦν.

καὶ ἐν τῇ σχηματογραφίᾳ δὲ τῶν πολυγώνων δύο μὲν ἐπὶ πάντων αἱ αὐταὶ μενοῦσι πλευραὶ μηκυνόμεναι καθ' ἕκαστον, αἱ δὲ παρὰ ταύτας ἐναποληφθήσονται τῇ τῶν γνωμόνων περιθέσει αἰεὶ ἀλλασσόμεναι, μία μὲν ἐν τριγώνῳ δύο δὲ ἐν τετραγώνῳ καὶ τρεῖς ἐν πενταγώνῳ καὶ ὁμοίως ἐπ' ἄπειρον, κατὰ δυάδος κἀνταῦθα διαφορὰν τῆς κλήσεως τῶν πολυγώνων πρὸς τὴν ποσότητα τῶν ἀλλασσομένων γινομένης.

Es wird sich aber auch im Folgenden zeigen, dass die Eins auch die Entstehung der räumlichen Figuren anführt und potentiell die Verhältnisse aller dieser umfasst, dazu auch, dass sie, von sich selbst und um sich selbst gleichsam gedreht, wieder in sich selbst in den alten Zustand zurückkehrt wie ja auch der Kreis von einem Punkt aus um einen Punkt in gleichbleibendem Abstand <Radius> wieder zum gleichen Punkt zurückkehrt. Wenn aber das Kreisverhältnis in der Eins erscheint, andererseits aber bei der Dreiheit die Gestaltungen der Vielecke beginnen, hat die Schule des Pythagoras mit gutem Grund die Zweiheit als "unbegrenzt" bezeichnet, weil ihr entsprechend keine einzige Gestalt umgrenzt wird. Ist doch die erste geradlinige Flächenfigur und Urgestalt das Dreieck, weil in drei Grenzen zwei Dimensionen gegeben sind.

Und weil in der Geometrie die Vielecke vom Dreieck gebildet werden - jedenfalls wenn sie aus ihm zusammengesetzt und auch wieder in das Dreieck aufgelöst werden -, so werden auch deshalb auch bei den Zahlen **[62]** die Vieleckzahlen von den Dreieckszahlen nach einer gewissen natürlichen Ordnung dargestellt werden.

Es wird nämlich die potentielle Dreieckzahl, die Eins, die Differenz der aktuell ersten Vieleckzahlen bilden, die, in die Tiefe betrachtet, die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 4 , 9, 10 und so fort sind. Die aktuell erste Dreieckszahl ist die Drei; ihrer Stellung nach ist sie aber die zweite <1, 3>, und so wird sie auch bei den zweiten Vieleckzahlen die Differenz bilden, nämlich bei den Zahlen 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27; die dritte Dreieckszahl aber ist die 6, und sie kehrt immer wieder in der Reihe 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, und wiederum die vierte Dreieckszahl in der Reihe der vierten <10; Reihe: 15, 25, 35 usw.> und die fünfte Dreieckszahl in der Reihe der fünften <15; Reihe: 21, 36, 51 usw.> und immer so fort.

Und wenn man die Vielecke aufzeichnet, dann werden bei allen die gleichen zwei Seiten erhalten bleiben, jeweils entsprechend verlängert, die anderen Linien aber außer diesen zwei Grund-Seiten werden, immer wieder anders, durch das Anlegen der Gnomone mit umfasst werden, eine beim Dreieck, zwei beim Viereck und drei beim Fünfeck und so immer weiter ins Unendliche, wobei auch hier die Benennung der Vielecke im Abstand von zwei gegenüber der Größe der Veränderungen erfolgt <da ein Gnomon beim Dreieck, zwei Gnomone beim Viereck usw. angelegt werden, ist die Bezeichnung der Vielecke der Anzahl der Gnomone stets um zwei voraus>.

ἐντεῦθεν καὶ ἡ ἔφοδος τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος ἐλήφθη. ὡρισμένων γὰρ ἢ ἀορίστων μερισαμένων ὡρισμένον τι καὶ ἑνὸς οὑτινοσοῦν τοῖς λοιποῖς καθ' ἕκαστον συντεθέντος, τὸ ἐκ πάντων ἀθροισθὲν πλῆθος ἐπὶ μὲν τριῶν μετὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὁρισθεῖσαν ποσότητα ὅλον τῷ συγκριθέντι προσνέμει τ' ἀφ' οὗ τὸ λεῖπον καθ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀφαιρεθήσεται, ἐπὶ δὲ τεσσάρων τὸ ἥμισυ καὶ ἐπὶ πέντε τὸ τρίτον καὶ ἐπὶ ἓξ τὸ τέταρτον καὶ ἀεὶ ἀκολούθως, δυάδος κἀνταῦθα διαφορᾶς ἐπιφαινομένης **[63]** πρός τε τὴν ποσότητα τῶν μεριζομένων καὶ πρὸς τὴν τοῦ μορίου κλῆσιν. παρατηρητέον πῶς κἀνταῦθα ἡ μονὰς χώρας ἔσχε τῷ ὅλῳ συζυγῆσαι· ἐν μὲν γὰρ τῷ τῶν πολυγωνιῶν θεωρήματι τῷ κατὰ τὴν σχηματογραφίαν ἐλέγομεν μίαν εἶναι τὴν ἀλλασσομένην πλευρὰν τῶν τριγώνων, δύο δὲ τῶν τετραγώνων καὶ τρεῖς πενταγώνων καὶ ἑξῆς ἀκολούθως. ἐνταῦθα δὲ τῷ ἐπανθήματι εἰ μὲν τρεῖς εἶεν οἱ μεριζόμενοι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ὁρισθέντος ὁρισμοῦ, ὅλον τὸ ληφθὲν προσνεμοῦμεν τῷ συγκριθέντι πρὸς τοὺς λοιπούς, ὡς ἀναλόγως ἔχειν ἐνταῦθα τὸ ὅλον πρὸς τὴν ἐν τοῖς τριγώνοις ἀλλασσομένην μίαν πλευράν. καὶ ἐπεὶ ἐκεῖ δύο ἔσονται ἐπὶ τετραγώνων αἱ ἀλλασσόμεναι πλευραί, ἐνταῦθα, εἰ τέσσαρες εἶεν οἱ μεριζόμενοι, τὸ ἥμισυ προσνεμοῦμεν, εἴτε τρίτον ἐπιτρεῖς, καὶ ἀεὶ ἀναλόγως ποιοῦντες οὐ διαπεσούμεθα. ὅτι δὲ οὐ παρέλκει τὸ ἐπάνθημα τοῦτο, ἀλλὰ καὶ πρὸς θεώρημα ἀριθμητικὸν ἔχει τὴν ἀναφορὰν καὶ ἐφόδου γλαφυρωτάτης πρὸς ἀνεύρεσιν αἴτιον ἡμῖν γίνεται, οὕτως ἂν θεωρήσαιμεν.

προστετάχθω γὰρ ἡμῖν λόγου χάριν ἀριθμοὺς ἐκθέσθαι τέσσαρας, ὧν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου διπλάσιος ἔσται τρίτου ἅμα καὶ τετάρτου, καὶ πάλιν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου τριπλάσιος δευτέρου ἅμα καὶ τετάρτου, ὁμοίως τε ὁ αὐτὸς πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου τετραπλάσιος τῶν δύο μέσων δευτέρου ἅμα καὶ τρίτου, σύμπαντες δὲ ἅμα πενταπλάσιοι τῶν αὐτῶν δύο μέσων, ὡς ἂν καὶ τάξει φυσικῇ τῶν πολλαπλασίων ἀπὸ διπλασίου εἰς πενταπλάσιον ἡ προχώρησις **[64]** εἴη.

Blume des Thymaridas

Von daher ist auch das Verfahren der "Blume" des Thymaridas genommen. Wenn nämlich bestimmte oder unbestimmte Größen <x_1 , x_2.,...., x_n> sich in eine bestimmte <s> teilen und eine beliebige <x_1> von ihnen jeweils mit jeder anderen zusammenaddiert wird <$x_1 + x_2 = a_1$, ...$x_1 + x_n = a_{n-1}$>, dann wird die aus allen <Paaren> gebildete Summe < $a_1 + a_2 + ... a_{n-1}$> nach Subtraktion der ursprünglichen Summe <s> bei drei <Größen> der zu den übrigen hinzugefügten <Größe x_1> ganz zugeteilt, bei vier aber die Hälfte und bei fünf der dritte Teil und bei sechs der vierte Teil und so immer in Folge, wobei sich auch hier als Abstand die Zahl zwei zeigt, und zwar **[63]** sowohl bezüglich der Quantität des Geteilten wie auch bezüglich der Benennung des Bruches <vgl. 4 mit 2 als Nenner von $\frac{1}{2}$, 5 mit 3 usw.>. Man muss beachten, wie auch hier die Eins Möglichkeiten fand, um sich mit dem Ganzen zu verbinden; denn bei der Untersuchung der Vielecke in figürlicher Darstellung betonten wir, dass die veränderte Seite bei Dreiecken nur eine ist, zwei bei den Vierecken und drei bei den Fünfecken und so der Reihe nach in Folge weiter. Hier aber werden wir nach der "Blume", wenn die sich teilenden Zahlen drei wären nach der Wegnahme der bestimmten Begrenzung, das ganze Umgriffene zu dem mit den übrigen Zahlen Verglichenen hinzufügen, um hier das Ganze analog zu der bei den Dreiecken geänderten einen Seite zu haben. Und da es dort bei den Vierecken zwei Seiten sind, die sich ändern, werden wir hier, wenn die sich teilenden Zahlen vier sind, die Hälfte hinzugeben und dann ein Drittel, wenn es drei Seiten sind, und wenn wir stets analog verfahren, werden wir keinen Fehler machen. Dass aber dieses "Blumenverfahren" nicht nur ein Trick ist, sondern auch Bezug auf einen arithmetischen Satz hat und für uns die eleganteste Lösungsmethode bereitstellt, können wir etwa so beweisen:

Wir wollen nämlich zum Beispiel die Aufgabe erhalten, eine Reihe von vier Zahlen aufzustellen, von denen die erste mit der zweiten doppelt so groß ist wie die dritte zusammen mit der vierten, und wiederum soll die erste zusammen mit der dritten dreimal so groß sein wie die zweite und vierte zusammen, und ebenso soll die erste Zahl selbst mit der vierten zusammen viermal so groß sein wie die beiden Zahlen in der Mitte (die zweite zusammen mit der dritten), alle Zahlen zusammen aber sollen fünfmal so groß sein wie die beiden mittleren Zahlen selbst, so dass auch das Voranschreiten der Vielfachen in einer natürlichen Ordnung vom Zweifachen zum **[64]** Fünffachen vorliegt.

ἐφοδευτέον δὴ οὕτως. ἐπεὶ ἡμίσους χρεία διὰ τὸν διπλάσιον, λαμβάνω τὸν δύο ἀριθμόν· πρώτιστος γὰρ ἡμίσους παρεκτικὸς καὶ πρῶτος διπλάσιος. ἐπεὶ δὲ καὶ τρίτου διὰ τὸν τριπλάσιον λόγον, τρὶς ποιῶ τὰ δύο. ὁ δὴ γενόμενος ς′ δι' ἀμφοτέρους τοὺς γεννήτορας πρῶτος ἔσται καὶ ἡμίσους καὶ τρίτου ἐπιδεκτικός. πάλιν δὲ ἐπεὶ τετάρτου μέρους δεῖ διὰ τὸν τετραπλάσιον λόγον, τετράκι τὰ ς′ ποιῶ, καὶ ἐπεὶ πενταπλασίου χρεία, τὰ κδ′ πεντάκις, ἅπερ γίνεται ρκ′, καὶ ἔχω τοῦτον τὸν ἀριθμὸν κοινὸν ὄντα συγκεφαλαίωμα τῶν τεσσάρων ὅρων, ὃ δὴ καὶ θετέον εἶναι μεριστὸν εἰς τοὺς ἀναφανησομένους τέσσαρας ἀριθμούς, οἷς ἐμφανίσονται οἱ προειρημένοι λόγοι.

διανεμητέον τὸν ρκ′ τρόπῳ τούτῳ. ἐπεὶ οἱ πρῶτοι δύο ἀριθμοὶ τῶν λοιπῶν δύο διπλάσιοι ἔσονται, ἐστὶ δὲ διπλασίων πυθμὴν ὡς δύο πρὸς ἕν, ἅ ἐστιν ὁμοῦ τρία, δὶς ποιῶ τὸν ρκ′, καὶ τὸν σμ′ μερίζω παρὰ τὸν τρίτον. γίνεται δὴ μέρος ἓν τὰ π′. φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τοὺς δύο πρώτους ἀριθμούς, οἵπερ διπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δύο, ὄντων δηλονότι καὶ αὐτῶν ἐν τεσσαράκοντα μονάσι. πάλιν ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος τριπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὡς τρία πρὸς ἕν, ἅ ἐστιν ὁμοῦ δ′, ποιῶ τρὶς τὸν αὐτὸν ρκ′ καὶ γίνεται τξ′, ἃ μερίζω παρὰ τὸ τέταρτον, ἵν' ᾖ τὸ μέρος ϙ′.

φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τὸν πρῶτον ἅμα καὶ τὸν τρίτον, τοὺς τριπλασίους τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὄντων δηλονότι ἐν μονάσι λ′.

πάλιν ἐπεὶ ὁ πρῶτος σὺν τῷ τετάρτῳ τετραπλάσιός ἐστι τῶν δύο **[65]** μέσων δευτέρου καὶ τρίτου, ὡς τέσσαρα πρὸς ἕν, ἅ ἐστιν ὁμοῦ πέντε, τετράκις ποιῶ τὰ ρκ′, γίνεται υπ′, μερίζω παρὰ τὸν ε′ καὶ ἔχω μέρος ἓν τὰ ϙς′.

τοσούτων οὖν φημι μονάδων εἶναι τὸν πρῶτον σὺν τῷ τετάρτῳ, οἵπερ τετραπλάσιοί εἰσι τῶν δύο μέσων ἐν μονάσιν ὄντων κδ′. κατὰ συνδυασμὸν οὖν εὑρημένων τῶν ἀριθμῶν, οὐδέπω δὲ καθ' ἑαυτοὺς διακεκριμένων, ἔφοδον ἡμῖν τῆς διακρίσεως παρέχει ἡ τοῦ Θυμαρίδου ἐπανθήματος γνῶσις.

Man muss aber nun so vorgehen: Da wir die Hälfte brauchen wegen des Doppelten, nehme ich die Zahl zwei; sie ist nämlich die erste Zahl, die eine Hälfte bilden lässt, und ist die erste, die ein Doppeltes ist. Da wir aber wegen des dreifachen Verhältnisses auch ein Drittel benötigen, nehme ich die zwei dreimal. Die daraus entstehende Zahl 6 nun wird aufgrund ihrer beiden Faktoren die erste Zahl sein, die eine Hälfte und ein Drittel enthält. Da wir aber wiederum auch ein Viertel brauchen wegen des vierfachen Verhältnisses, nehme ich die 6 viermal <ergibt 24>, und weil wir ein Fünffaches brauchen, nehme ich die 24 fünfmal, was 120 ergibt, und so habe ich diese Zahl als die gemeinsame Summe der vier Terme, von der man auch nun annehmen muss, dass sie in die vier dann erscheinenden Zahlen teilbar ist, in denen die zuvor angegebenen Verhältnisse sich zeigen werden.

Man muss die Zahl 120 in folgender Weise teilen: Da die ersten zwei Zahlen doppelt so viel sein werden wie die beiden restlichen, und da die Grundform von Doppeltem sich wie zwei zu eins verhält, was zusammen drei ergibt, verdopple ich 120 und teile die Zahl 240 durch drei. Dabei ergibt sich als ein Teil die Zahl 80. Ich sage nun, dass die beiden ersten Zahlen so viele Einheiten haben werden, wie viele das Doppelte der beiden restlichen ausmacht, die natürlich auch ihrerseits vierzig Einheiten haben werden. Da wiederum die erste und die dritte Zahl das Dreifache betragen werden der beiden übrigen Zahlen, der zweiten und der vierten, so wie sich drei zu eins verhält, was zusammen 4 ergibt, so nehme ich die gleiche Zahl 120 dreimal, und es ergibt sich die Zahl 360, die ich durch vier teile, so dass die Zahl 90 herauskommt.

Ich sage weiter, dass die erste Zahl und die dritte zusammen so viele Einheiten haben wie das Dreifache der beiden übrigen Zahlen (der zweiten und vierten), die natürlich aus 30 Einheiten bestehen.

Da wiederum die erste Zahl mit der vierten zusammen das Vierfache **[65]** der beiden mittleren Zahlen (der zweiten und der dritten) ergibt, so wie sich auch vier zu eins verhält (was zusammen fünf ergibt), nehme ich 120 viermal, und das ergibt 480; nun teile ich durch 5 und erhalte als einen Teil <$\frac{1}{5}$> die Zahl 96.

Nun behaupte ich, dass die erste mit der vierten Zahl zusammen so viele Einheiten haben, wie viele das Vierfache der beiden mittleren Zahlen beträgt, die 24 Einheiten umfassen. Da die Zahlen also nun durch Verdopplung <als Summe> gefunden, aber noch nicht im Einzelnen unterschieden sind, stellt uns die Kenntnis der "Blume" des Thymaridas einen Lösungsweg zu dieser Unterscheidung bereit.

συγκεφαλαιωθέντων γὰρ ὁμοῦ τῶν κατὰ τὰς συζυγίας ἀριθμῶν, λέγω δὲ τοῦ π′ καὶ ϙ′ καὶ ϙϛ′, τὸ σύμπαν ἔσται σξϛ′. ἀφαιρῶ δὴ τὸν ἐξ ἀρχῆς μερισθέντα εἰς τοὺς τέσσαρας ὅρους τὸν ρκ′, καὶ λείπεταί μοι ρμϛ′, ὧν ἐπεὶ τέσσαρές εἰσιν οἱ μερισάμενοι τὸ ἥμισυ ἕξει ὃ κατὰ τὴν πρώτην συζυγίαν ἴδιον ὁ π′. ἔστι δὲ ἥμισυ ὁ ογ′, καὶ τὰ λοιπὰ ἀπὸ τῶν π′ τὰ ζ′ ἔσται τοῦ δευτέρου ὅρου. ἐπειδὴ ἡ δευτέρα συζυγία περιέχει ἀριθμὸν τὸν ϙ′, πάλιν ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ϙ′ τὸν ογ′, καὶ λείπεται ιζ′, ἅ φημι εἶναι τοῦ τρίτου ὅρου. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ τρίτη συζυγία ϙϛ′ ἐστὶ μονάδων, πάλιν ἀφαιρῶ τὰ ογ′, καὶ τὰ λοιπὰ κγ′ προσνέμω τῷ τετάρτῳ ὅρῳ.

καὶ οὕτως γίνεταί μοι ὁ πρῶτος ὅρος τῶν ογ′, ὡσανεὶ γνώμων τῆς τῶν συζυγιῶν εὑρέσεως, ὥστε καθ' ἕκαστον ἰδίᾳ διακεκριμένους τοὺς τέσσαρας εὑρεθῆναι ἐφεξῆς ὄντας ογ′ ζ′ ιζ′ κγ′, οἵπερ εἰσὶν ὁμοῦ ρκ′ περιέχοντες τοὺς εἰρημένους λόγους τόν τε διπλάσιον καὶ πενταπλάσιον. πρώτιστοι μὲν οὖν οὗτοι καὶ πυθμενικοὶ ἀριθμοὶ ἐν τελείαις μονάσιν τοὺς εἰρημένους λόγους **[66]** ἐπιδέχονται. εἰ δὲ καὶ μερίζειν θέλοιμεν τὴν μονάδα καὶ τοὺς κατ' αὐτὴν εἰδοποιηθέντας ἀριθμοὺς περισσοὺς εἰς δύο ἴσα, φανήσονται καὶ οἱ τῶν προκειμένων ἀριθμῶν ἡμίσεις τοὺς αὐτοὺς περιέχοντες λόγους ὅ τε λϛ′ (″ καὶ ὁ γ′ (″ καὶ ὁ η′ (″ καὶ ια′ (″ , ὧν καὶ τὰ συγκεφαλαιώματα ξ′, ἅτινα ἡμίση ἔσται δηλονότι τοῦ προτέρου συγκεφαλαιώματος τοῦ ρκ′. εἰ δὲ καὶ πολλαπλασίους τῶν ἐξ ἀρχῆς ποιῶμεν καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασίου εἶδος, ἢ ἐπιμορίους, ἢ ἐπιμερεῖς, οἱ γενόμενοι πάντως τοὺς αὐτοὺς λόγους περιέξουσιν.

ἵνα δὲ τεσσάρων ἄλλων ἀριθμῶν ἐκτεθέντων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τοῖς προτέροις ὁμοταγεῖς κατὰ συνδυασμὸν τὸν προειρημένον τῶν ὁμοιοτάτων, ἀντὶ μὲν πολλαπλασίων γενικῶς <ὑποπολλαπλάσιοι γίνωνται>, εἰδικῶς δὲ ἀντὶ μὲν διπλασίων ἡμιόλιοι, ἀντὶ δὲ τριπλασίων ἐπίτριτοι, ἀντὶ δὲ τετραπλασίων ἐπιτέταρτοι, λαμβάνω κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον, ἐπεὶ ἡμιολίου λόγου χρεία, ἀντὶ διπλασίου τὸν πρῶτον δυνάμενον ἥμισυ παρασχεῖν, τουτέστι τὸν δύο, ὅσπερ ἦν καὶ πρῶτος διπλάσιος ἐπὶ τῶν προτέρων ἀριθμῶν, καὶ πεντάκις αὐτὸν ποιῶ, διότι σύστημά ἐστι τὰ ε′ τῶν τὸν ἡμιόλιον λόγον περιεχόντων τοῦ γ′ καὶ β′.

Wenn man nämlich alle Zahlen entsprechend den Verbindungen summiert (ich nenne aber 80, 90 und 96), so wird die Gesamtsumme 266 betragen. Nun ziehe ich die von Anfang an auf die vier Terme verteilte Zahl 120 ab, und es bleibt mir 146 übrig, und davon wird (da hier die sich teilenden Zahlen vier sind), was nach der anfänglichen Zusammenstellung ihre Besonderheit ist, die Zahl 80 die Hälfte enthalten. Die Hälfte aber <von 146> ist 73 <die erste Größe>, und der Rest auf 80, die Zahl 7, wird dem zweiten Term gehören. Da aber die zweite Verbindung die Zahl 90 umfasst, ziehe ich wiederum von 90 die Zahl 73 ab, und es bleiben 17 übrig, von denen ich behaupte, dass sie die dritte Größe bilden. Da aber auch die dritte Verbindung 96 Einheiten hat, ziehe ich wieder die Zahl 73 ab, und den Rest 23 teile ich dem vierten Term zu.

Und so erhalte ich die erste Größe 73, sozusagen den Gnomon zur Auffindung der Verbindungen, so dass (jeweils eigens unterschieden) die vier Zahlen gefunden sind, nämlich in Reihe: 73, 7, 17, 23, die zugleich 120 umfassen <73 + 7 + 17 + 23 = 120> und dazu die genannten Verhältnisse, das Doppelte und das Fünffache. Als erste nun und als grundlegende werden diese die genannten Verhältnisse **[66]** in ganzen Einheiten ermöglichen.Wenn wir aber auch die Einheit und ebenso die ihr entsprechend dargestellten ungeraden Zahlen in zwei gleiche Teile zerlegen wollen, dann wird sich herausstellen, dass auch die Hälften der vorliegenden Zahlen die gleichen Verhältnisse umfassen, also $36\frac{1}{2}$ und $3\frac{1}{2}$ und $8\frac{1}{2}$ und $11\frac{1}{2}$, deren Summe auch zusammen 60 ergibt, und dies ist natürlich die Hälfte der vorherigen Summe von 120.Wenn wir aber auch Vielfache von unseren Ausgangszahlen <73, 7, 17, 23> in jeder beliebigen Form des Vielfachen bilden, entweder Überteilige oder Überteilende, dann werden die entstehenden Zahlen vollkommen dieselben Verhältnisse einschließen.

Nun sollen aber von einer Reihe von vier anderen Zahlen in gleicher Anordnung wie die ersten Zahlen in derselben Reihe angeordnete entsprechend der vorgenannten Zweierverbindung oder ähnlicher <Zahlen> entstehen, also anstelle von Vielfachen generell <vielmal kleinere> Zahlen, speziell aber anstelle von Doppelten anderthalbmal so große, anstelle von Dreifachen eineindrittelmal so große, anstelle von Vierfachen eineinviertelmal so große. Ich nehme entsprechend derselben Methode, weil ich das Verhältnis Eineinhalbfach brauche, anstelle des Doppelten die erste Zahl, die eine Hälfte bilden kann, nämlich die Zwei, die ja auch die erste doppelte Zahl bei den früheren Zahlen war; diese Zwei nehme ich fünfmal, weil die 5 zusammengesetzt ist aus den Zahlen 3 und 2, die ja das Verhältnis Eineinhalbfach einschließen.

καὶ ἐπεὶ ἀντὶ τριπλασίου ἐπιτρίτου λόγου χρεία, πυθμὴν δὲ ἐπιτρίτων ὁ δ′ πρὸς γ′ ἐστίν, ὁμοῦ ζ′, ποιῶ ταῦτα δεκάκις, γίνεται ο′.

πάλιν ἐπεὶ χρεία ἐπιτετάρτου ἀντὶ τετραπλασίου, ἔστι δὲ πυθμὴν ἐπιτετάρτων ε′ πρὸς δ′, ἅ ἐστι ὁμοῦ θ′, ἐνάκις ποιῶ τὸν ο′, γίνεται χλ′. οὗτος οὖν ἔσται ὁ συνέχων τοὺς περιεκτικοὺς τῶν εἰρημένων λόγων ἀριθ**[67]**μούς.

καὶ ἐπεὶ ἡμιολίου λόγου χρεία, διότι τοὺς πρώτους δύο ἀριθμοὺς τῶν ὑστέρων δύο ἡμιολίους εἶναι δεήσει, ἔστι δὲ ὁ πρῶτος λόγος ἐν τοῖς ἡμιόλιον λόγον περιέχουσι πυθμέσιν ὁ γ′, τρὶς ποιῶ τὸν χλ′ καὶ <γίνεται> ,αωϙ′, ἃ μερίζω παρὰ τὸν ε′, ὅ ἐστι σύστημα τῶν πυθμενικῶν ἡμιόλιον, καὶ ἴσχω πέμπτον μέρος τὸν <τοη′> ἀριθμόν, <ὅν> φημι εἶναι πρώτην συζυγίαν τῶν ἀναφανησομένων πρώτου καὶ δευτέρου ἀριθμοῦ, οἳ ἔσονται ἐν τῇ ἐκθέσει ἡμιόλιοι τῶν ὑστέρων δύο.

πάλιν ὅτι ἐπιτρίτου λόγου χρεία, διότι τὸν πρῶτον καὶ τὸν τρίτον ἀριθμὸν συνάμφω ἐπιτρίτους χρὴ εἶναι δευτέρου καὶ τετάρτου, ἔστι δὲ πρόλογος ἐν ἐπιτρίτῳ πυθμέσιν ὁ δ′, τετράκις ποιῶ τὸν χλ′, γίνεται ,βφκ′, ἃ μερίζω παρὰ τὸ συναμφότερον τῶν τὸν ἐπίτριτον λόγον περιεχόντων πυθμένων, τουτέστι τὸν ζ′, καὶ ἴσχω μέρος ζ^{ον} τὸν τξ′ ἀριθμόν, ὃς γίνεταί μοι δευτέρας συζυγίας τῶν ἀναφανησομένων πρώτου καὶ τρίτου ἀριθμοῦ, οἳ συνάμφω ἐπίτριτοι ἔσονται δευτέρου καὶ τετάρτου.

ὁμοίως διότι ἐπιτετάρτου λόγου χρεία, ἵνα πρῶτος καὶ τέταρτος συνάμφω τῶν δύο μέσων ἐπιτέταρτοι ὦσιν, ἔστι δὲ πρόλογος ἐν ἐπιτετάρτῳ πυθμέσι <ὁ ε′>, ποιῶ πεντάκις τὸν χλ′, γίνεται ,γρν′, ἃ μερίζω παρὰ τὸ συναμφότερον τῶν τὸν ἐπιτέταρτον λόγον περιεχόντων πυθμένων, τουτέστιν θ′, καὶ ἴσχω μέρος θ^{ον} τν′, ἃ δὴ λέγω τρίτην εἶναι συζυγίαν πρώτου καὶ τετάρτου ἀριθμοῦ, οἳ συνάμφω ἐπιτέταρτοι **[68]** γενήσονται δευτέρου ἅμα καὶ τρίτου.

Und weil ich anstelle des Dreifachen das Verhältnis Einundeindrittel brauche, die Grundform von Einundeindrittel aber das Verhältnis 4 zu 3 ist, die zusammen 7 ergeben, nehme ich dies zehnmal, es entsteht so die Zahl 70.

Wiederum, da ich Einundeinviertel anstelle des Vierfachen brauche, die Grundform von Eineinvierteln aber 5 zu 4 ist, die zusammen 9 ergeben, nehme ich 70 neunmal, und das ist 630. Diese Zahl nun wird es sein, welche die Zahlen einschließt, die die genannten Verhältnisse umfassen. **[67]**

Und weil man auch das eineinhalbfache Verhältnis benötigt, weil die beiden ersten Zahlen das Eineinhalbfache der beiden späteren sein müssen, und weil die erste Verhältniszahl in den Grundformen, die das eineinhalbfache Verhältnis umfassen, die Zahl 3 darstellt <3 : 2> nehme ich 630 dreimal, und es kommt die Zahl 1890 heraus, die ich durch 5 teile, eine Zahl, die aus den Grundzahlen für das Eineinhalbfache zusammengesetzt ist <3 : 2; 2 + 3 = 5>, und ich bekomme als den fünften Teil die Zahl 378, von der ich behaupte, sie sei die erste Verbindung der herauskommenden ersten und zweiten Zahl; und diese werden in der Reihe das Eineinhalbfache der beiden späteren Zahlen bilden.

Wiederum: Weil ich auch das Verhältnis Eineindrittel benötige, da ja die erste und dritte Zahl zusammengenommen Eineindrittel der zweiten und vierten Zahl sein müssen und beim Verhältnis Eineindrittel das Vorderglied die Zahl 4 in den Grundzahlen ist <4 : 3>, nehme ich die Zahl 630 viermal, und es kommt 2520 heraus; diese Zahl teile ich entsprechend der gemeinsamen Summe der das Verhältnis Eineindrittel umfassenden Grundzahlen, das heißt die 7 <4 + 3 = 7>, und ich erhalte als siebten Teil die Zahl 360; diese gehört mir zum zweiten Paar, nämlich der am Ende erscheinenden ersten und dritten Zahl, die zusammen Eineindrittel der zweiten und vierten Zahl ergeben werden.

Da wir in gleicher Weise auch das Verhältnis Eineinviertel brauchen, damit die erste und vierte Zahl zusammen Eineinviertel der beiden mittleren Zahlen bilden, das Vorderglied aber beim Verhältnis Eineinviertel in den Grundformen <die 5> ist <5 : 4>, nehme ich die Zahl 630 fünfmal, und das ergibt 3150; diese Zahl teile ich entsprechend der Summe der das Verhältnis Eineinviertel umfassenden Grundzahlen <4 + 5>, das also heißt durch 9, und ich erhalte als 9ten Teil die Zahl 350, und von dieser behaupte ich, dass sie das dritte Paar ist, nämlich aus erster und vierter Zahl, die beide zusammen Eineinviertel der zweiten und zugleich **[68]** der dritten Zahl ergeben werden.

ἵνα δὲ καὶ διακρίνω εἰς τοὺς ζητουμένους τέσσαρας ἀριθμοὺς τὰς τρεῖς συζυγίας, χρήσομαι τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος. συγκεφαλαιῶ γὰρ πάλιν τοὺς τῶν συζυγιῶν ἀριθμοὺς τόν τε τοη′ καὶ τὸν τξ′ καὶ τὸν τν′, ἵν' ᾖ μοι τὸ ἀθροισθὲν πλῆθος ͵απη′, καὶ πάλιν ἀφαιρῶ τὸ ἐξ ἀρχῆς συγκεφαλαίωμα χλ′. καὶ ἐπειδὴ τέσσαρές εἰσιν οἱ ζητούμενοι ὅροι, τὸ ἥμισυ τοῦ λειπομένου ἀριθμοῦ τοῦ υνη′ τὰ σκθ′ προσνέμω τῷ πρώτῳ ὅρῳ τῶν ζητουμένων, ὃς πρὸς τοὺς λοιποὺς τρεῖς τὴν σύγκρισιν ἕξει. ἀπὸ δὲ τοη′, ὅσπερ ἦν τῆς πρώτης συζυγίας ἀριθμός, ἂν ἀφέλω τὰ σκθ′, λείπεταί μοι ρμθ′.

τοῦτον οὖν φημι τὸν δεύτερον ἐν τῇ ἐκθέσει ἀριθμὸν εἶναι. πάλιν ἐπεὶ ἡ δευτέρα συζυγία ἀριθμός ἐστιν ὁ τῶν τξ′, ἀφαιρῶ τὸν αὐτὸν σκθ′ καὶ λείπεταί μοι ρλα′, ὅν φημι εἶναι τρίτον ὅρον ἐν τῇ ἐκθέσει. ὁμοίως ἐπεὶ τρίτης συζυγίας ἐστὶ τὰ τν′, ἀφέλω σκθ′, λείπω ρκα′ καὶ ἴσχω τὸν τέταρτον.

ὁμοῦ οὖν τῶν τεσσάρων ὅρων τάξει τούτων σκθ′ ρμθ′ ρλα′ ρκα′ ὁ μὲν πρῶτος καὶ δεύτερος συνάμφω ἔσονται τρίτου τε καὶ τετάρτου ἡμιόλιοι, πρῶτος δὲ ἅμα καὶ τρίτος δευτέρου καὶ τετάρτου ἐπίτριτοι, πρῶτος δὲ πάλιν καὶ τέταρτος συνάμφω δευτέρου τε καὶ τρίτου ἐπιτέταρτοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ ταῦτα μὲν ἔξωθεν ἡμῖν εἰς ἔνδειξιν τῆς τῶν ἀριθμητικῶν ἐπανθημάτων γλαφυρίας οὐκ ἀσκόπως παρηδολεσχείσθω.

᾿Επανιτέον δὲ ἐπὶ τὴν τῶν πολυγώνων θεωρίαν καὶ **[69]** προσεκτέον πῶς καὶ καθ' ὅλων αὐτῶν τὸ διάγραμμα συμβαίνοι τοὺς συνεχεῖς ἀπὸ μονάδος ἀριθμούς, εἰ προεκτεθείησαν κατὰ πρῶτον στίχον, γνώμονας εἶναι τοῦ συνεχοῦς αὐτοῖς τριγωνικοῦ στίχου, τοῦ δὲ παρ' ἕνα τοὺς παρ' ἕνα καὶ τοῦ παρὰ δύο τοὺς παρὰ δύο καὶ <τοῦ παρὰ τρεῖς τοὺς> παρὰ τρεῖς καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

Damit ich aber auch die drei Paare in die gesuchten vier Zahlen unterteilen kann, wende ich dieselbe Methode an, nämlich die der "Blume" des Thymaridas. Denn ich summiere wiederum die Zahlen, also 378 und 360 und 350, damit ich als Gesamtgröße 1088 erhalte, und wiederum ziehe ich die Anfangssumme 630 ab. Und weil die gesuchten Terme vier sind, rechne ich die Hälfte der übriggebliebenen Zahl 458, die Zahl 229, zum ersten Term der gesuchten <Terme> hinzu, die mit den übrigen drei verglichen werden wird. Wenn ich aber von der Zahl 378, die zum ersten Paar gehörte, den Wert 229 abziehe, bleiben mir 149 übrig. Von dieser Zahl nun behaupte ich, dass sie die zweite Zahl in der Reihe ist.

Da nun wiederum die Summe des zweiten Paares die Zahl 360 ergibt, nehme ich die gleiche Zahl 229 weg, und es bleibt mir 131 übrig, eine Zahl, von der ich behaupte, dass sie den dritten Term in der Reihe bildet. In gleicher Weise ziehe ich, da das dritte Paar den Wert 350 beträgt, die Zahl 229 ab, erhalte als Rest 121 und bekomme die vierte Zahl.

Also stehen nun die vier Terme in der Anordnung 229, 149, 131 und 121 da, und die erste und zweite Zahl zusammen werden eineinhalbmal so viel ergeben wie die dritte und vierte Zahl <229 + 149 = 378; 131 + 121 = 252; 374 : 252 = 1,5>; zugleich werden die erste und dritte Zahl zusammen Eineindrittel der zweiten und vierten Zahl sein <229 + 131 = 360; 149 + 121 = 270; 360 = 270 + 90>, und wiederum werden die erste und die vierte Zahl zusammen Eineinviertel der zweiten und dritten betragen, und dies war zu beweisen. So viel will ich außerhalb <des Systems des Nikomachos> zur Darstellung der Eleganz der arithmetischen "Blumen" wohlbedacht geplaudert haben.

Erzeugungsweisen der Vieleck-Zahlen

Doch nun müssen wir uns wieder der Untersuchung **[69]** der Vielecke zuwenden und unsere Aufmerksamkeit darauf richten, wie es sich auch entsprechend der Tabelle mit allen von ihnen ergibt, dass die der Eins in Reihe folgenden Zahlen, wenn man sie in der ersten Zeile der Tabelle hinstellt, Gnomone sind für die ihr unmittelbar darunter folgende Dreiecksreihe, und zwar für die jeweils zweite die jeweils zweiten und <für die jeweils dritte> die jeweils dritten und so immer weiter.

καὶ οἱ μὲν τοῦ ἑπταγώνου πάντες γνώμονες ὁμοκατάληκτοι ἔσονται τοῖς πρώτοις δυσὶ τῷ τε α′ καὶ τῷ ϛ′, οἱ δὲ τῶν ἄλλων κατ' ἄλλας καὶ ἄλλας θεωρίας, ὥσπερ ἐν τῇ τοῦ ἑξαγώνου ἐκθέσει πάντες οἱ τέλειοι εὑρεθήσονται.

καὶ ἴδιόν τι τοῖς ἑξαγώνοις συμβεβηκὸς ἔσται τὸ καὶ τριγώνοις εἶναι πᾶσιν, οὐκέτι μὴν τοῖς τριγώνοις πᾶσι τὸ καὶ ἑξαγώνοις εἶναι συμβήσεται, ἀλλ' ἢ μόνοις τοῖς παρ' ἕνα, τουτέστι τοῖς ἡμίσεσι τοῖς α′ ϛ′ ιε′ κη′ με′, ἵνα καὶ ἐνταῦθα τὸ ἥμισυ τῷ δύο οἰκείως συζυγῇ. ἐπεὶ γὰρ διπλάσιος ὁ ἑξάγωνος καταστὰς γωνίας τε καὶ πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, διὰ τοῦτο τοὺς ἡμίσεις παρέξει ἀφ' ἑαυτοῦ ὁ τριγωνικὸς στίχος ἑξαγώνους, οἱ δ' ἐν τῇ ἐκθέσει τῶν ἑξαγώνων τέλειοι ἅμα καὶ τρίγωνοί εἰσιν.

ἐν δὲ τῇ τοῦ πενταγώνου, ἔνθα δύο ἄρτιοι ἀνὰ μέσον τῶν δύο συζυγιῶν περισσῶν, ὁ μὲν ἕτερος ἀναγκαίως τῶν ἀρτίων ἀρτιοπέρισσός ἐστιν, ὁ δὲ λοιπὸς περισσάρτιος.

καὶ πολλὰ ἄλλα παρακολουθήματα γλαφυρὰ εὕροι τις ἂν συντείνων ἑαυτὸν συμβεβηκότα τῷ τῶν πολυγώνων διαγράμματι, οἷον ὅτι ἐπὶ βάθος οἱ πρῶτοι μετὰ τὰς μονάδας ὁ ἐφεξῆς ἀριθμός ἐστιν, οἱ δὲ δεύτεροι κοινῇ μὲν διαφορᾷ **[70]** χρώμενοι τριάδι, τάξει δὲ οἱ ἐπιμόριοι ἀφ' ἡμιολίου ἀρχόμενοι, οἱ δὲ τρίτοι ἐπιμερεῖς κοινῇ μὲν ἑξάδα διαφορὰν ἔχοντες ὀνομαζόμενοι δὲ τάξει τινὶ ἄλλῃ πρὸς ἀλλήλους·

<Die Tabelle hat folgende Form:

Dreiecke	1	3	6	10	15	21	28	36	
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	
Fünfecke	1	5	12	22	35	51	70	92	
Sechsecke	1	6	15	55	45	66	91	120	
Siebenecke	1	7	18	34	55	81	112	148	>.

Und alle Gnomone des Siebenecks werden die gleiche Endziffer haben wie die beiden ersten, nämlich die 1 und die 6, und die <Gnomone> der anderen <Vielecke> werden sich nach immer wieder anderer Betrachtung ergeben, wie man z .B. in der Reihe der Sechseckzahlen <1, 6, 15, 28, 45, 66, 91 usw.> alle vollkommenen <Zahlen> finden wird.

Und die Sechseckzahlen werden die besondere Eigenart haben, dass sie auch alle Dreieckzahlen sein werden, während es bei allen Dreiecken nicht mehr zutreffen wird, dass sie auch Sechsecke sind, sondern nur bei den jeweils zweiten, das heißt bei der Hälfte, also: 1, 6, 15, 28, 45, damit auch hier das Halbe und die Zwei als Verwandte beisammen sind. Weil nämlich das Sechseck die Verdopplung des Winkels und der Seite des Dreiecks darstellt, deshalb wird auch die Zeile mit den Dreieckszahlen von sich aus <"automatisch"> die Hälfte der Sechseckzahlen bieten, während in der Reihe der Sechsecke die Zahlen zugleich vollkommen und Dreieckszahlen sind .

In der Zeile des Fünfecks aber, wo zwei gerade Zahlen in der Mitte zwischen den zwei ungeraden Verbindungen stehen <z.B. 12, 22 zwischen 1, 5 und 35, 51>, wird die eine der geraden Zahlen mit Notwendigkeit geradeungerade sein, die andere aber ungeradgerade.

Und wer sich Mühe gibt, kann noch viele andere hübsche Folgen herausfinden, die sich aus der Tabelle der Vieleckzahlen ergeben, zum Beispiel, dass in die Tiefe die ersten Zahlen <rechts> neben den Einsen die jeweils in der Zahlenreihe folgenden Zahlen sind <3, 4, 5, 6, 7>, während die zweiten Zahlen <nach rechts> gemeinsam den Abstand **[70]** drei haben <6, 9, 12, 15, 18>, der Anordnung nach aber die Überteiligen, beginnend mit dem Eineinhalbfachen <$9 = 6 \cdot 1\frac{1}{2}$>, die dritten aber Überteilende <10, 16, 22, 28, 34>, die gemeinsam den Abstand Sechs voneinander haben, aber nach einer gewissen anderen Ordnung gegeneinander die Nenner bilden.

ἐπιτριμερεῖς μὲν γάρ, ἀλλὰ πέμπτα τὰ μέρη ἐπὶ τοῦ πρώτου, ἐπὶ δὲ τοῦ ἑξῆς ὄγδοα, εἶτα ἑνδέκατα, εἶτα τεσσαρεσκαιδέκατα, ἑξῆς ἀκολούθως, ὀνομαζομένων τῶν μορίων ἀεὶ κατὰ τὸ τοῦ ὑπολόγου ἥμισυ καὶ τῇ συζυγίᾳ τῆς ἐπιμερότητος.

ἐμφανέστερον δὲ εὑρίσκεται ὁ ἐν τῷ διαγράμματι ἕκαστος μὲν τετράγωνος σύστημα ὢν τοῦ ὑπὲρ αὐτοῦ τριγώνου καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου ὁμοειδοῦς, ἅπας δὲ πεντάγωνος τοῦ κατ' αὐτὸν ἐπὶ βάθος τριγώνου καὶ δὶς τοῦ πρὸ ἐκείνου, καὶ πᾶς ἑξάγωνος τοῦ κατ' αὐτὸν ἐπὶ βάθος τριγώνου καὶ τρὶς τοῦ πρὸ ἐκείνου, καὶ ἑπτάγωνος ὁμοίως τοῦ κατ' αὐτὸν καὶ τετράκι τοῦ πρὸ ἐκείνου, καὶ ἀεὶ τὸ αὐτὸ συμβήσεται κατὰ πρόσθεσιν μονάδος τῆς ποσότητος παραυξομένης.

πάλιν ὁ δεύτερος τετράγωνος ὁ θʹ σύστημά ἐστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν τριγώνου τοῦ ἓξ καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου γʹ, ὡς εἴρηται. ὁ δ' ὑπὸ τοῦτον πεντάγωνος ιβʹ σύστημά ἐστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν τετραγώνου τοῦ θʹ καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου τετραγώνου τοῦ δʹ, παρὰ τὸν εʹ, διαγωνίου κειμένου αὐτῷ ἑνὸς τριγώνου. ὁ δ' ὑπὸ τοῦτον ἑξάγωνος ὁ ιεʹ σύστημά ἐστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν πενταγώνου τοῦ ιβʹ καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου εʹ, παρὰ δὶς τὸν αὐτὸν τρίγωνον τὸ πρῶτον αʹ.

ὁ δ' ὑπ' αὐτὸν ἑπτάγωνος ὁ ιηʹ ἐκ τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν ἑξαγώνου τοῦ ιεʹ καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου τοῦ ϛʹ, παρὰ τρὶς τὸν αὐτὸν τρίγωνον τὸ αʹ. οἱ γὰρ ἐνεργείᾳ **[71]** πρῶτοι πολύγωνοι οἱ μετὰ τὰς δυνάμει μονάδας τεταγμένοι παρ' οὐδὲν ἦσαν, ἀλλά πως ἕκαστος ἐκ τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου.

πάλιν δὲ ἐξ ἄλλης ἀρχῆς ὁ ιϛʹ τετράγωνος κατὰ τὸν τέταρτον ἐπὶ πλάτος στίχον τεταγμένος σύστημά ἐστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν τριγώνου τοῦ ιʹ καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου ϛʹ ὁμοίως παρ' οὐδέν.

Denn sie enthalten zwar Ganze und drei Teile <z.B. $1\frac{3}{4}$>, doch bei der ersten Zahl sind es Fünftel, bei der folgenden Achtel, dann Elftel, dann Vierzehntel und so in Folge der Reihe nach, wobei die Brüche immer entsprechend der Hälfte des Hintergliedes und in der Verbindung des der Qualität nach Überteilenden benannt sind.

Deutlicher aber lässt sich aus der Tabelle ablesen, dass jede Viereckzahl eine Zusammensetzung darstellt aus der Dreieckzahl über ihr und der gleichartigen Zahl <der Dreieckzahl> vor dieser <z.B. 9 = 6 + 3; 16 = 10 + 6>; jede Fünfeckzahl aber ist eine Zusammensetzung aus der ihr entsprechenden Dreieckszahl in die Tiefe und zweimal der Zahl vor jener <12 = 6 + 2 · 3; 35 = 15 + 2 · 10>; und jede Sechseckzahl ist zusammengesetzt aus der entsprechenden Dreieckszahl in die Tiefe und dreimal der Dreieckzahl vor jener <z.B. 24 = 10 + 6 · 3; 66 = 21 + 15 · 3>; und die Siebeneckzahl besteht in gleicher Weise aus der entsprechenden Dreierzahl über ihr und viermal der Zahl vor dieser <z.B. 34 = 10 + 4 · 6; 81 = 21 + 4 · 15>, und immer wird das Gleiche geschehen, wenn man die Größe <der betreffenden Dreieckszahl> durch Hinzufügen einer Eins entsprechend vermehrt.

Wiederum aber ist die zweite Quadratzahl, die 9, eine Zusammensetzung der Dreieckszahl über ihr, der Sechs, und der Zahl 3 vor jener, wie schon gesagt <9 = 6 + 3>. Die Fünfeckzahl unter dieser <9> aber, die 12, ist die Zusammensetzung aus der über ihr stehenden Quadratzahl 9, und der vor jener stehenden Quadratzahl 4 minus der Zahl 1 <9 + (4 - 1) = 12>, der diagonal zur 4 stehenden Dreieckszahl. Die unter ihr <12> stehende Sechseckzahl aber, die 15, ist eine Zusammensetzung der über ihr stehenden Fünfeckzahl, der 12, und der vor dieser stehenden Zahl 5 minus zweimal der gleichen ersten Dreieckszahl, der 1 <15 = 12 + (5 - 2 · 1) = 12 + 3>.

Die unter ihr <der 15> stehende Siebeneckzahl 18 aber ist zusammengesetzt aus der über ihr stehenden Sechseckzahl, der 15, und der vor jener stehenden Zahl 6 minus dreimal dieselbe Dreieckzahl, die 1 <18 = 15 + (6 - 3) = 15 + 3>. Denn die aktuell **[71]** ersten Vielecke, die hinter den potentiellen Einheiten standen, entstanden ohne Abzug, sondern irgendwie nur jedes aus der Summe der Zahl über ihr und der vor dieser stehenden Zahl.

Wiederum aber, von einem anderen Ausgangspunkt: Die Quadratzahl 16, die in der vierten <senkrechten> Reihe nach rechts steht, ist eine Zusammensetzung der Dreieckszahl über ihr, der 10, und der vor dieser <10> stehenden Zahl 6, ebenso <wie oben> ohne jeden Abzug.

ὁ δ' ὑπ' αὐτὸν πεντάγωνος ὁ κβʹ σύστημα τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν τετραγώνου τοῦ ιϛʹ καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου τοῦ θʹ, παρὰ τὸν ἐνεργείᾳ πρῶτον τρίγωνον τὸν γʹ, διαγώνιον ὄντα πρὸς αὐτόν.

ὁ δ' ὑπ' αὐτὸν ἑξάγωνος ὁ κηʹ συνέστηκεν ἔκ τε τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν κβʹ πενταγώνου καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου ιβʹ, παρὰ δὶς τὸν αὐτὸν τρίγωνον τὸν γʹ. ὁ δ' ὑπ' αὐτὸν ἑπτάγωνος ὁ λδʹ σύστημά ἐστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν ἑξαγώνου τοῦ κηʹ καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου ιεʹ, παρὰ τρὶς [καὶ] τὸν αὐτὸν τρίγωνον τὸν γʹ.

καὶ ἑξῆς ὁμοίως τὸ αὐτὸ συμβήσεται συμπροκοπτόντων τοῖς ἑξῆς ἐπὶ τὸ πλάτος λαμβανομένοις πολυγώνοις καὶ τῶν γνωμονικῶν τριγώνων. ὁ μὲν γὰρ ἐφεξῆς εἰς τὸ ἔπος στίχος τῶν πολυγώνων, οὗ ἄρχει ὁ ιεʹ τρίγωνος, διεκταθήσεται ὁμοίως τοῖς προειρημένοις κατὰ τὸν ιʹ τρίγωνον· ὁ δὲ μετ' αὐτόν, οὗ ἀρχὴ καʹ, κατὰ τὸν ιεʹ.

καὶ ἀεὶ ὁμοίως διεκταθήσεται ἡ προκοπὴ τῶν πολυγώνων καὶ τῶν εἰδοποιούντων αὐτοὺς τριγώνων, ὥστε καθολικὸν ἐπ' αὐτῶν εἶναι θεώρημα τοῦτο· ἕκαστος γὰρ πολύγωνος σύστημά ἐστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν μονάδι μικρωνυμωτέρου καὶ τριγώνου τοῦ ἑνὶ βαθμῷ ὑποβεβιβασμένου. καὶ τὰ μὲν **[72]** τοῖς ἐπιπέδοις ἀριθμοῖς συμβαίνοντα ὡς ἐν ἐπιδρομῇ ἐπὶ τοσοῦτον ἡμῖν δεδείχθω.

Ἐπεὶ δὲ καὶ περὶ ἑτερομηκῶν λέγειν καιρός, διότι τῆς τῶν ἐπιπέδων ἰδιότητός εἰσι καὶ αὐτοί, ἄξιον θαυμάσαι τῶν περὶ Πυθαγόραν τὴν περὶ τὰ μαθήματα σπουδήν τε καὶ ἀκρίβειαν· κατιδόντες γὰρ οἱ σοφώτατοι πάντας τοὺς ἐν ἀριθμῷ λόγους ποικιλωτάτους ὄντας καὶ ἀπείρους τὸ πλῆθος ἀπὸ μονάδος ἅπαντας, ὥσπερ ἀπὸ κοινῆς τινος ῥίζης, φυομένους καὶ εἰς τὸ ἐνεργείᾳ ἀπὸ δυνάμεως μεθισταμένους ἀρτίους τε καὶ περισσοὺς καὶ καθ' ἑκάτερον τοὺς εἰδικοὺς αὐτῶν τελείους τε καὶ τοὺς ἐναντίους, Die unter ihr <16> stehende Fünfeckzahl aber, die 22, ist eine Zusammensetzung aus der Quadratzahl über ihr, der 16, und der vor dieser <16> stehenden Zahl, der 9, minus der aktuell ersten Dreieckzahl, der 3, die diagonal zu ihr steht <22 = 16 + (9 - 3)>.

Die unter ihr <22> stehende Sechseckzahl aber, die 28, ist zusammengesetzt aus der Zahl über ihr, der 22, einer Fünfeckzahl, und aus der vor dieser <22> stehenden Zahl, der 12, minus zweimal dieselbe Dreieckzahl, die 3 <28 = 22 + (12 - 6) >. Die Siebeneckzahl unter dieser <28> aber, die 34, ist eine Zusammensetzung aus der Sechseckzahl über ihr, der 28, und der vor dieser stehenden Zahl, der 15, minus dreimal dieselbe Dreieckszahl, die 3 <34 = 28 + (15 - 9)>.

Und so wird sich in Folge immer in gleicher Weise das Gleiche ergeben, wobei mit den der Reihe nach rechtshin genommenen Vielecken auch die Dreieckszahlen als Gnomone mitvoranschreiten. Denn die folgende Reihe der Vieleckzahlen nach rechts, an deren Anfang die Dreieckzahl 15 steht, wird sich ganz entsprechend dem Vorhergesagten um die Dreieckzahl 10 erweitern; die Reihe nach dieser aber, die mit 21 beginnt, wird um jeweils 15 gedehnt werden.

Und in gleicher Weise wird durchgehend das Voranschreiten der Vielecke und der sie gestaltenden Dreiecke ausgedehnt werden, so dass in Bezug auf sie folgender allgemeine Satz gilt, nämlich: Jede Vieleckzahl ist eine Zusammensetzung aus der Zahl über ihr, die um eine Ecke kleiner ist, und aus der Dreieckzahl darüber, die aber um einen Schritt zurückgeführt wird <z.B.: 51 = 36 + 15; 92 = 64 + 28>. Die Eigenart **[72]** der Flächenzahlen soll also insoweit kurz dargestellt sein.

Rechteck- (heteromeke) Zahlen

Da es nun aber auch Zeit ist, über die Rechteckzahlen zu sprechen (besitzen doch auch sie die Eigenart der Flächenzahlen), muss man die Mühe und genaue Sorgfalt bewundern, die die Pythagoreer in den mathematischen Wissenschaften aufwandten. Diese hochweisen Männer erkannten nämlich folgendes: Alle Zahlenverhältnisse sind zwar sehr vielfältig und unendlich viele; sie gehen aber alle zusammen aus der Eins als einer Art von gemeinsamer Wurzel hervor und werden, vom potentiellen Zustand in den aktuellen übergeführt, gerade und ungerade und, in beiden Fällen, in ihre speziellen vollkommenen und entgegengesetzten Formen gebracht;

ἔτι μὴν καὶ τὰς δέκα σχέσεις ἀπ' αὐτῆς πλασσομένας, πολυγώνους τε καὶ ἐπιπέδους ἀπὸ τριγώνου μέχρις ἀπείρου, ἔτι μὴν καὶ στερεούς, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται, κατὰ πᾶν εἶδος στερεοῦ, σφαιρικοὺς λέγω καὶ κυβικοὺς καὶ πυραμιδικούς, πλευρικούς τε καὶ διαμετρικούς, καὶ ἁπλῶς ἅπαντα ὅσα συμβέβηκε τοῖς ἀριθμοῖς προσεμφαινόμενα τῇ μονάδι ἐκείνην τε καὶ ἀπ' ἐκείνης διατρανούμενα δὲ μόνον λόγον τὸν ἑτερομηκικὸν ἐν ἁπάσῃ τῇ θεωρίᾳ τῇ ἀριθμητικῇ κατὰ μηδὲν αὐτῇ κοινωνοῦντα μήτε ἐν τῷ μεταλαμβάνειν μήτε ἐν τῷ μεταδιδόναι, ἀλλ' ὥσπερ ἀντίξουν αὐτῇ καὶ ἑτερογενῆ ἐπίτηδες ὑπ' αὐτῆς τῆς φύσεως ἀναδειχθέντα πως.

κατὰ τὴν τῶν ἀρχῶν τούτων ἐναντιότητα τῶν ὄντων ἁπάντων συνισταμένων, ὡς ἑξῆς ἐπιδειχθήσεται, ἡ τῆς ἁρμονίας οὐσία χώραν **[73]** ἀναγκαίως ἔχει, εἴ γε 'συναρμογά τίς ἐστι καὶ ἕνωσις τῶν διχοφωνεόντων καὶ τᾷ φύσει πολεμίων ἁρμονία' κατὰ τοὺς Πυθαγορείους,[18] καὶ ἄλλως ἵνα τὰ καθόλου κἀνταῦθα διαφυλάττηται τὸ 'μηδὲν εἶναι ἐν τοῖς οὖσιν οὗ τὸ ἐναντίον οὐκ ἔστιν'. εὐθὺς οὖν καὶ ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὀνόματος τῆς ἑτερότητος τὴν ἐναντιότητα συνιδεῖν ἔστι· ταὐτὸν γὰρ ἐναντία.

ἡ δὲ ταυτότης καὶ ἑνότης περὶ τὴν τῆς μονάδος φύσιν φαντάζεται, ὅπως καὶ μονάδα ἔφαμεν αὐτὴν κεκλῆσθαι διὰ τὸ μονὴν καὶ στάσιν ἔχειν αὐτῆς τὸν λόγον, εἴτε καθ' ἑαυτὴν ἐξετάζοιτο, εἴτε καὶ σὺν ἄλλῳ ᾡτινιοῦν εἴτε ἀριθμῷ εἴτε ὄγκῳ εἴτε μεγέθει πλησιάζοι καὶ ἀνακίρναιτο, στάσιν αὐτῷ καὶ ταυτότητα παρέχει· ἅπαξ γὰρ τὰ ἑκατὸν ρ', καὶ ἅπαξ τὸ τρίγωνον τρίγωνον, καὶ ἅπαξ ὁ ἄνθρωπος ἄνθρωπος, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως.

καὶ μὴν καὶ ὅτι τῶν περισσῶν εἰδοποιὸς ἐφάνη οὖσα ἡ μονὰς ἰδίως, γνώμονες δὲ τετραγώνων ἐφάνησαν ὄντες οἱ περισσοί, ταυτότητα δὲ καὶ ἰσότητα ἐνείδομεν τοῖς τετραγώνοις ὑπάρχουσαν, εὐλόγως ἂν ἡ ταυτότης ἀπὸ μονάδος καὶ διὰ μονάδα τοῖς ἀλόγοις συμβαίνειν λέγοιτο.

---

[18] vgl. Philolaos DK B 10

auch werden die zehn Relationen von der Einheit her gebildet, dazu die Vielecke und Flächenfiguren vom Dreieck bis zum Unendlichen, weiterhin aber auch die Raumfiguren (wie später gezeigt wird), und zwar in jeder Form des Räumlichen (ich meine Kugelformen, Würfelformen und Pyramidenformen), auch die Zahlen der Einheiten an der Seite eines Rechtecks und die Diagonalzahlen <unter Diagonalzahlen sind die Zähler der sukzessiven Konvergenten zur Wurzel aus zwei, ausgedrückt als fortgesetzter Bruch, zu verstehen> und einfach alles, was mit den Zahlen geschieht, zeigt sich zusätzlich auch an der Einheit; sie und das von ihr Erklärte aber haben nur das Rechteckverhältnis <ein Produkt aus zwei ungleichen Faktoren>, als etwas, was in der genannten arithmetischen Theorie in nichts mit ihr Gemeinsamkeit hat, weder im Wegnehmen noch im Geben, sondern als etwas ihr wie Entgegengesetztes und als etwas von anderer Gattung ist der Eins das Rechteckverhältnis von der Natur selbst mit vollem Bedacht gezeigt.

Da entsprechend dem Gegensatz dieser Urgründe das gesamte Sein zusammengesetzt ist (wie im Folgenden dargelegt wird), gewinnt das Wesen der Harmonie **[73]** notwendigerweise Raum und Rang, wenn jedenfalls die Harmonie "eine Art von Zusammenfügung und Vereinigung der Dinge ist, die disharmonisch und von Natur aus feindlich sind" (wie die Pythagoreer sagen), und, anders, damit der allgemeine Grundsatz auch hier durchgehalten wird, "daß es nichts im Seienden gibt, zu dem nicht auch ein Gegensatz existiert." Man kann nun schon gleich an der Bezeichnung der Andersartigkeit selbst die Gegnerschaft erkennen; "verschieden" ist ja dasselbe wie "feindlich".

Die Identität aber und die Einheit werden an der Natur der Eins deutlich, so dass wir auch sagten, sie werde "gleichbleibend" <monas> genannt, weil ihre Aussage etwas Gleichbleibendes <mone> und Standfestes hat; ob man sie nun an ihr selbst prüft oder ob man sie mit irgendetwas anderem - sei es eine Zahl, eine Masse oder eine Größe - in Verbindung bringt und vermischt, die Einheit verleiht ihm Beständigkeit und Identität. Einmal hundert bleibt nämlich 100, einmal ein Dreieck ist ein Dreieck, und einmal ein Mensch ist ein Mensch, und genauso ist es bei allen Dingen.

Und auch weil sich erwies, dass die Einheit die besondere Eigenschaft besitzt, die Spezies (Art) der Ungeraden herzustellen, und als Gnomone der Quadratzahlen die ungeraden Zahlen erschienen, wir aber erkannten, dass den Quadratzahlen Identität und Gleichheit innewohnen, so wird man mit gutem Grunde sagen dürfen, dass von der Eins und durch die Eins die Identität den anderen Dingen zuwächst.

εἰ δὲ ἡ ταυτότης κατὰ μονάδα, ἡ ἑτερότης κατὰ τὴν ἐναντίαν δύναμιν συμβήσεται τοῖς οὖσιν· πάλιν γὰρ αὕτη φανήσεται ἰδίως τοὺς ἑτερομήκεις εἰδοποιοῦσα καὶ μηδὲν τῆς μονάδος εἰς τὴν πλάσιν αὐτῶν δεομένη, ἀλλ' εὐθὺς ἑτερότητα καὶ παρατροπὴν τῆς διὰ μονάδα ταυτότητος κατὰ τὰς πλευρὰς ἀπογεννῶσα.

παρὰ μο**[74]**νάδα γὰρ ἴσας τὰς πλευρὰς παντὸς ἑτερομήκους ἀποφαίνει, διότι καὶ αὕτη παρὰ μονάδα ἴση ἐστὶ τῇ μονάδι, καὶ πρώτη ἀνισότητος αἰτία γενήσεται καὶ μείζονος καὶ ἐλάττονος ἐμφαντική. καὶ ἡ συνήθεια τὸ ἕτερον ἐπὶ δυοῖν λέγει· ὅθεν καὶ οἱ γεννῶντες τὸν ἑτερομήκη δύο τέ εἰσιν ἀριθμοὶ καὶ μονάδι ἀλλήλων διαφέροντες.

ἐκ ταὐτοῦ, ὃ δὴ καὶ ἴσον καὶ ὅμοιον, ἐξ ἑτέρου, ὃ δὴ καὶ ἄνισον καὶ ἀνόμοιόν ἐστιν, ὡσανεὶ ἐκ δύο στοιχείων πάντα διαφερόντων, γίνεσθαι ἔδοξε τοῖς ἀπὸ Πυθαγόρου πρώτιστα μὲν τὰ ἐν ἀριθμοῖς συμπτώματα διὰ τὴν τῆς δυάδος πρὸς μονάδα ἐναντιότητα, κατὰ δὲ τὴν τούτων ἤδη μετουσίαν καὶ ἀφομοίωσιν καὶ τὰ ἐν κόσμῳ πάντα· τὰ μὲν γὰρ ἄλλα πάντα τὸν ἀριθμὸν φαίνεται μιμούμενα, ὁ δὲ ἀριθμὸς παρ' ἑαυτοῦ ἀρχὰς μονάδα καὶ δυάδα.

ὡς οὖν ἀπὸ πάντων τῶν τέσσαρας πλευράς τε καὶ γωνίας ἐχόντων σχημάτων συστείλαντες τὸ ὄνομα τετράγωνον ἐκαλέσαμεν τὸν πάσας πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχοντα, οὕτως καὶ ἑτερομήκη καλέσομεν ἀπὸ πάντων τῶν τῆς ἑτερότητος εἰδῶν κατὰ τὰς πλευρὰς τὸν ἐγγυτάτω τῆς ἑτερότητος τὴν παρατροπὴν ἐμφήναντα, τουτέστι τὸν παρὰ μονάδα τὸ ἕτερον ἐν τοῖς μήκεσιν ἐσχηκότα, ἀντιδιεσταλμένως λεγόμενον τῷ αὐτομήκει.

ὅπερ πάλιν οὐ συνιδὼν ὁ Εὐκλείδης συνέχεε κἀπὶ τούτῳ τὴν τῆς θεωρίας ἐξαλλαγὴν καὶ ποικιλίαν, οἰηθεὶς ἑτερομήκη εἶναι τὸν ἁπλῶς ὑπὸ διαφόρων δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιασθέντων γινόμενον καὶ μὴ διακρινόμενος αὐτοῦ <τὸν> προμήκη, ὅπερ εἰ συγχωρήσειέ τις αὐτῷ, συμβήσεται τὰ ἐναντία ἀσυνύπαρκτα φύσει ὄντα ἅμα καὶ **[75]** περὶ τὸ αὐτὸ εὑρίσκεσθαι·

Wenn aber das Seiende seine Identität gemäß der Einheit gewinnt, wird ihm die Verschiedenheit entsprechend der gegensätzlichen Kraft <der Zweiheit> zuteilwerden. Wiederum nämlich wird sich herausstellen, dass diese die Eigenheit besitzt, die Rechteckzahlen in eigener Weise zu bilden, und zu deren Bildung keineswegs die Einheit benötigt, sondern, ihren Seiten entsprechend, ohne weiteres Verschiedenheit und Abwendung von der Identität durch Einheit bewirkt. **[74]**

Die Verschiedenheit stellt die Seiten jeder Rechteckzahl als "identisch minus Eins" dar, weil sie ja selbst von der Einheit um Eins verschieden ist, und sie wird die erste Ursache der Ungleichheit sein und das Größere und Kleinere anzeigen. Der Sprachgebrauch sagt auch "das Andere" bei zwei Dingen; deshalb sind es auch zwei, um eins voneinander unterschiedene Zahlen, die die Rechteckzahl bilden.

Aus dem Identischen (dieses ist ja auch das Gleiche und Dasselbe) und aus dem Verschiedenen (dies ist ja auch das Ungleiche und Nicht-Identische) wie aus zwei voneinander völlig verschiedenen Elementen entstand nach der Ansicht der Pythagoreer zuerst das Unheil in den Zahlen durch den Gegensatz der Zweiheit zur Einheit; entsprechend ihrer Teilnahme aber und ihrer Angleichung entsteht auch bereits alles im Kosmos. Denn alles andere scheint die Zahl nachzuahmen, die Zahl aber von sich aus die Urformen Einheit und Zweiheit.

Wie wir nun von allen Figuren mit vier Seiten und Winkeln den zusammenfassenden Namen bildeten und die Zahlenfigur, die alle Seiten und Winkel gleich hatte, "Viereck" <gemeint ist Quadrat> nannten, so werden wir auch "Rechteck" <heteromekisch> die Zahlenfigur nennen, die von allen Formen der Verschiedenheit entsprechend ihren Seiten die der Verschiedenheit am nächsten stehende Abweichung aufweist, das heißt das Rechteck, das die eine seiner Längen nur um eine Einheit verschieden hat und entgegengesetzt der "selbstlangen" Zahlenfigur <gemeint ist das Quadrat, mit einer überall gleichen Seite> bezeichnet wird.

Auch dies hat Eukleides wieder nicht begriffen und versperrt auch in diesem Punkt die Entwicklung und Vielfalt <Differenzierung> der Theorie. Meint er doch, rechteckig sei einfach die Zahlenform, die aus zwei verschiedenen multiplizierten Zahlen entstehe, und er unterscheidet davon nicht die längliche <promekische> Zahl; würde man ihm dies aber zugestehen, ergäbe sich, dass zwei verschiedene von Natur aus nicht miteinander vereinbare Aussagen **[75]** über das Gleiche gefunden werden.

τὸν αὐτὸν γὰρ ἀριθμὸν τετράγωνον ἀλλὰ καὶ ἑτερομήκη ἀποφαίνει ὁ ἐκείνου λόγος, οἷον τὸν λς′ καὶ τὸν ις′ καὶ ἑτέρους πολλούς, ὅπερ ἴσον ἂν εἴη τῷ τὸν περισσὸν ἀριθμὸν ταὐτὸν εἶναι τῷ ἀρτίῳ. εἰ δέ γε ἐκεῖνοι ἀπ' αὐτῆς τῆς φύσεως καὶ οὐχ ἡμῶν θεμένων εἷς παρ' ἕνα διευτακτοῦνται καὶ οὐκ ἄν ποτε συγγυθεῖεν, οὕτως τετράγωνοι καὶ ἑτερομήκεις φυσικώτατοι καὶ αὐτοὶ εὐταξίᾳ χρήσονται ὡς ἂν ἀπ' ἐκείνων τὴν πλάσιν ἔχοντες καὶ διακόσμησιν, ἡγουμένης καὶ ἀρχούσης τῶν μὲν περισσῶν μονάδος, δυάδος δὲ τῶν ἀρτίων·

ἐκ μὲν γὰρ τῶν α′ γ′ ε′ ζ′ θ′ ια′ ιγ′ ιε′ ιζ′ ιθ′ καὶ ἐφοσονοῦν συντιθεμένων, γίνονται τετράγωνοι οἱ α′ δ′ θ′ ις′ κε′ λς′ μθ′ ξδ′ πα′ ρ′ ἐκ δὲ τῶν β′ δ′ ς′ η′ ι′ ιβ′ ιδ′ ις′ ιη′ κ′ ἑτερομήκεις οἱ β′ ς′ ιβ′ κ′ λ′ μβ′ νς′ οβ′ ϙ′ ρι′. καὶ οἱ μὲν ἰσάκις ἴσοι πλευρὰς ἕξουσι τοὺς ἀπὸ μονάδος ἐφεξῆς ἀριθμούς, οἱ δὲ ἀνισάκις ἄνισοι ἔγγιστα, τουτέστι παρὰ μονάδα τοὺς ἀπὸ μονάδος ἐφεξῆς σύνδυο, κατὰ τὸν συνημμένον τρόπον ἐκλεγομένους, ἵνα καὶ αἱ πλευραὶ μονάδι ἀλλήλων διαφέρωσιν.

ἐν μὲν οὖν τῇ τῶν τετραγώνων γενέσει ἡ μονὰς τὴν αἰτίαν ἀποφέρεται τῆς συστάσεως· ἔν τε γὰρ τῇ τῶν γνωμόνων περιθέσει αὕτη ἐστὶν ἡ προϋφισταμένη, ἄνευ δὲ αὐτῆς καθ' αὑτοὺς τῶν περισσῶν ἡ ἐπισύνθεσις οὐκ ἂν γεννήσειε τετραγώνους, ἔν τε τῇ κατὰ τὸν λεγόμενον δίαυλον ἐπισωρείᾳ τῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν παρέχει ἑαυτὴν ἡ μονὰς ὕσπληγά τε καὶ νύσσαν καθ' ἑκάστην **[76]** ἐπισύνθεσιν· ἀπ' αὐτῆς τε γὰρ ἡ τῆς προβάσεως ἀρχὴ γίνεται κατὰ τὴν γένεσιν ἑκάστου τετραγώνου, ὡς ἀπὸ ὕσπληγος μέχρι ὡσανεὶ καμπτῆρος τῆς τοῦ ἀποτελεσθησομένου πλευρᾶς, καὶ πάλιν ἐπ' αὐτὴν ἡ ἐπάνοδος ὡς ἐπί τινα νύσσαν, κατὰ διαφόρησιν πάντων τῶν ἀριθμῶν καὶ αὐτῆς, πλὴν τοῦ καμπτῆρος, ὅπερ καὶ πλευρὰ ἔσται τοῦ κατ' αὐτὸν τετραγώνου.

οὕτως γὰρ καὶ συμβήσεται ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν μέχρις ἑαυτοῦ τὴν ἀπὸ μονάδος πρόβασιν ἀναδεχόμενον καὶ ἀπ' αὐτοῦ τὴν ἀνάκρουσιν τῆς παλινδρομίας ὡς ἐπὶ μονάδα ποιούμενον πλευρὰν τετραγωνικὴν ὑπάρχειν, τὸν μὲν δύο πλευρὰν τοῦ τέτταρα τετραγώνου·

Seine Behauptung nämlich stellt die gleiche Zahl als quadratisch, zugleich aber auch als rechteckig hin, zum Beispiel die Zahl 36 oder die 16 und viele andere, und das wäre etwa so, wie wenn eine ungerade Zahl das Gleiche wäre wie eine gerade. Wenn aber jedenfalls jene <geraden und ungeraden> Zahlen von der Natur selbst und nicht nach unserer Satzung immer jede zweite in guter Ordnung gestellt und wohl auch nie vermischt werden, so werden Quadratzahlen und Rechteckzahlen <heteromeke Zahlen> in klarster natürlicher Beschaffenheit auch selbst die gute Ordnung wahren, da sie ja von jenen gebildet und geordnet werden, wobei die Eins die ungeraden Zahlen anführt und beherrscht, die Zwei aber die geraden Zahlen.

Wenn man nämlich die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 und so beliebig weiter zusammenzählt, ergeben sich die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100; aus den Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 entstehen die Rechteckzahlen 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110. Und die gleichmal gleichen Zahlen werden als Seiten der Reihe nach die Zahlen von der Eins an haben, die ungleichmal ungleichen Zahlen werden die allernächsten Zahlen als Seiten haben, nämlich neben der Eins das unmittelbar folgende Zahlenpaar (in Art einer Verbindung ausgewählt), damit auch die Seiten voneinander um die Zahl eins verschieden sind.

Also wird bei der Entstehung der Quadrate die Einheit die Ursache der Zusammensetzung beitragen; ist sie doch bei der Anlegung der Gnomone schon vorher vorhanden, und ohne sie würde die Zusammensetzung nur der ungeraden Zahlen allein keine Quadrate zustande bringen. Und in der kumulativen Addition der Zahlen in ihrer Ordnung nach der sogenannten Doppelbahn (Diaulos) beweist sich die Einheit als Startstelle und Ziel bei jeder **[76]** einzelnen Zusammensetzung. Bei ihr nämlich beginnt, entsprechend der Entstehung eines jeden Quadrates, wie vom Start bis sozusagen zur Wendesäule, das Voranschreiten der Seite des Quadrates, das entstehen soll, und wiederum geschieht die Rückkehr zu ihr wie zu einer Art Ziel, entsprechend einer Zerlegung aller Zahlen und ihrer selbst <der Eins>, mit Ausnahme des Wendepunktes, und dies wird auch die Seite des ihr entsprechenden Quadrates sein.

So nämlich wird es sich auch ergeben, dass jede Zahl bis zu sich selbst das Vorangehen von der Eins an aufnimmt, beim Wendepunkt die Kehrtwendung zum Gegenlauf zurück zur Eins vornimmt und so eine Quadratseite bildet, und zwar die Zahl zwei die Seite des Quadrates <der Quadratzahl> vier.

α′ γὰρ καὶ δύο καὶ ἐξ ὑποστροφῆς πάλιν ὁ α′, ὁ δ′ γίνεται τετράγωνος. τὸν δὲ γ′ τοῦ θ′· α′ γὰρ καὶ δύο καὶ τρία καὶ ἐξ ὑποστροφῆς β′ καὶ α′, ὁ θ′ τετράγωνος. τὸν δὲ τέταρτον δ′ τοῦ ις′· α′ γὰρ καὶ β′ γ′ δ′ <καὶ ἐξ ὑποστροφῆς γ′ β′ α′, ὁ ις′ τετράγωνος>.

καὶ μέχρι ὅσου τις θέλει διελεγχέτω, εὕροι ἂν πάντας μὲν τοὺς ἐντὸς τοῦ ὑστάτου ἀριθμοῦ, ὅς ἐστι πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, διαφορουμένους ἐν τῇ συνθέσει κατά τε τὴν ἀπὸ μονάδος πρόοδον καὶ τὴν εἰς αὐτὴν ἐπάνοδον· μόνον δὲ τὸν πλευρικὸν ἀδιαφόρητον, καὶ ἀρχῆς τε ἅμα καὶ τέλους καὶ πρὸς τούτοις μεσότητος λόγον ἔχοντα, ἀρχῆς μὲν διότι ἀπ' αὐτοῦ ἡ ἐπάνοδος εἰς μονάδα, τέλους δὲ διότι ἐπ' αὐτὸν ἡ πρόοδος ἀπὸ μονάδος, μεσότητος δὲ διότι ὁρίζει τήν τε πρόοδον καὶ ἐπάνοδον, ὡσανεὶ καμπτὴρ ὑπάρχων, καὶ μή τι διὰ τοῦτο δύναμίς ἐστιν αὐτοῦ τὸ πᾶν συγκεφαλαίωμα **[77]** τῶν ἐπισυντιθεμένων ἀριθμῶν κατά τε πρόοδον καὶ ἐπάνοδον, ἐπειδὴ ὥσπερ ἐν ἀκροπόλει μόνος τεταγμένος δορυφορεῖται ὡς ὑπὸ δυνάμεως τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν κατὰ πρόβασιν.

ἐν δὲ τῇ τῶν ἑτερομηκῶν συστάσει εἴτε γνωμονικῶς δέοι περιτιθέναι τινὶ τὴν ἐπισωρείαν τῶν ἀρτίων, ἡ δυὰς μόνη φανήσεται ἀναδεχομένη καὶ ὑπομένουσα τὴν περίθεσιν, ἄνευ δὲ αὐτῆς οὐ φύσονται ἑτερομήκεις·

εἴτε κατὰ τὸν αὐτὸν δίαυλον οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ συνσωρεύοιντο, ἡ μὲν μονὰς ὡς ἂν ἀρχὴ οὖσα πάντων κατὰ τὸν Φιλόλαον (‘οὐ γὰρ ἕν’ φησιν ‘ἀρχὰ πάντων’)[19] καὶ τοῖς ἑτερομήκεσιν εἰς γένεσιν ὕσπληγα ὁμοίως ἑαυτὴν παρέξει, οὐκέτι δὲ καὶ νύσσα ἔσται τῆς καθ' ὑποστροφὴν παλινδρομίας καὶ ἐπανόδου, ἀλλὰ τὸ τοιοῦτον ἡ δυὰς ἀντ' αὐτῆς ὑποστήσεται· ταύτης γὰρ αὐτῆς ἔσται ἡ ἐπάνοδος.

[19] Philolaos DK B 8

1 nämlich und zwei und umgekehrt wieder die 1, das ergibt das Quadrat 4 <1 + 2 + 1 = 4>, und 3 ergibt die Quadratzahl 9; 1 nämlich und zwei und drei und auf dem Rückweg 2 und 1 ergibt die Quadratzahl 9 <1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9>. Die vierte Zahl aber, also 4, wird die Quadratzahl 16 ergeben, ist doch 1 und 2 + 3 + 4 und rückläufig 3 + 2 + 1 das Quadrat 16.

Man kann dies durchprüfen, soweit man will, und man wird herausfinden, dass alle Zahlen vor der letzten Zahl, die die Seite des Quadrates bildet, in der Zusammensetzung verteilt sind, und zwar im Voranschreiten von der Eins an und der Rückkehr zu ihr hin. Allein bei der Seitenzahl selbst <z.B. bei der Quadratzahl 25 die Zahl 5> wird man finden, dass sie nicht verteilt ist, sondern zugleich ein Verhältnis von Anfang und Ende und dazu noch der Mitte einnimmt; den Anfang bildet sie, weil von ihr die Rückkehr zur Eins erfolgt; das Ende bildet sie, weil zu ihr hin das Voranschreiten von der Eins her erfolgt, und die Mittelstellung nimmt sie ein, weil sie die Grenze zwischen Hin- und Rückweg bildet und eine Art von Wendesäule darstellt, und deshalb ist ihr Quadrat <Potenz, "Macht"> die volle Gesamtsumme **[77]** aller zu ihr zusammengesetzten Zahlen auf dem Hin- und Rückweg; steht sie doch allein, wie auf einer Burg oben hingestellt, und wird sozusagen von der "Macht" der übrigen voranschreitenden Zahlen bewacht.

Wenn man aber bei der Zusammenstellung der Rechteckzahlen die kumulative Addition der geraden Zahlen um eine Zahl als Gnomon durchführen müsste, wird sich zeigen, dass allein die Zwei das Herumstellen der Zahlen um sich herum zulässt und aushält, ohne sie aber keine Rechteckzahlen entstehen werden.

Wenn aber nach dem gleichen Doppellauf <wie vorhin> die Zahlenreihen zusammenaddiert werden, wird sich die Einheit, die sozusagen der Ursprung von allem ist nach Philolaos ("ist nämlich nicht das Eine", sagt er, "der Ursprung von allem?") auch für die Erzeugung der Rechteckzahlen in gleicher Weise als Startpunkt bereitstellen, nicht mehr jedoch wird sie auch den Zielpunkt bilden für den Rück- und Heimweg nach der Umkehr; nein, diese Rolle wird an ihrer Stelle die Zweiheit übernehmen, wird doch gerade ihr die Rückkehr gehören.

ἔοικε δὲ ἡ μὲν ἀπὸ μονάδος πρόοδος μέχρι τῶν πλευρικῶν δύο ἀριθμῶν, οἵπερ καμπτήρων λόγον ἕξουσιν ἐπὶ τῶν ἑτερομηκῶν γενέσει προϊούσῃ ἀπὸ τῆς κοινῆς πάντων ἀρχῆς ὡσανεὶ ἐπ' ἀκμὴν αὐτοὺς τοὺς καμπτῆρας, ἡ δὲ ἀπὸ τούτων ἐπάνοδος ὥσπερ τις ἀνάλυσις οὖσα καὶ παρακμὴ φθορᾷ, διόπερ εὐλόγως εἰς μὲν σύστασιν καὶ αὐτῶν τῶν ἑτερομηκῶν ὡς ἂν εἴδους λόγον ἔχουσα ἡ μονὰς ἑαυτὴν ἐπιδώσει, εἰς δὲ ἀνάλυσιν καὶ ὡσανεὶ φθορὰν οὐκέτι, ἀλλὰ εἰς δυάδα ὕλης λόγον ἔχουσαν καταστρέψει, ὥσπερ ὁρῶμεν καὶ ἐπὶ τῶν φυσικῶν τὰ ἐν γενέσει πάντα τὸ μὲν γίνεσθαι καὶ τόδε τι εἶναι καὶ ἓν εἶναι ἕκαστον ἔχοντα παρὰ τὸ **[78]** εἶδος, τὸ δὲ φθείρεσθαι καὶ μὴ εἶναι ἀλλὰ ἀοριστεῖν παρὰ τὴν ὕλην· εἴδους γὰρ καὶ μορφῆς στερόμενον τὸ τόδε τι ὕλη ἂν εἴη ἀόριστος καὶ ἄποσος καὶ ἄποιος, διὰ τὴν τῆς δυάδος ἀοριστίαν καὶ ἀνισότητα.

διὰ τοῦτο ἰδίως τῶν ἑτερομηκῶν εἰδοποιὸς ἡ δυὰς ἐφάνη οὖσα καὶ τῆς ἰδίας δυνάμεως αὐτοῖς κατὰ τὰς πλευρὰς μεταδιδοῦσα, τουτέστι τῆς ἀνισότητος· δύο γὰρ τὸ ἄνισον, ὑπεροχὴ καὶ ἔλλειψις· ἡ δὲ μονὰς τῶν τετραγώνων, διόπερ καὶ ἰσάκις ἴσοι· ἀρχὴ γὰρ τῶν ἴσων τὸ ἓν καὶ ἡ μονάς, εἴ γε τὸ ἴσον ἓν πρὸς ἕν ἐστι, καὶ τὰ ἴσα καθ' ἕνα λόγον ἐστὶν ἴσα.

δῆλον οὖν ὅτι ἀναλόγως ἐξ εἴδους καὶ ὕλης τὰ ἐν κόσμῳ πάντα συνέστη καὶ γίνεται, ὡς ἐκ μονάδος καὶ δυάδος τὰ ἐν ἀριθμῷ συμπτώματα πάντα. πρώτως μὲν γὰρ εἰδοποιὸς ἑκατέρα ἡ ἀρχὴ τῶν δύο μηκῶν τοῦ ἀριθμοῦ, ἀρτίου λέγω καὶ περισσοῦ, δευτέρως δὲ ἡ μὲν τετραγώνων ἡ δὲ ἑτερομηκῶν, καὶ οὐκ ἐπαλλάττουσιν αἱ δυνάμεις αὐτῶν, ἀλλ' ἐναντιώταται οὖσαι κατὰ τὸν ἴδιον λόγον ἑκατέρα διατίθησι τὰ μετίσχοντα αὐτῶν·

ὡς γὰρ τὸ θερμὸν θερμαίνειν πέφυκε τὰ πλησιάζοντα καὶ τὸ ψυχρὸν ψύχειν καὶ τὸ ὑγρὸν ὑγραίνειν, οὕτως καὶ αἱ τῶν ὄντων ἀρχαὶ ἄμικτοι τῶν ἄλλων δυνάμεων οὖσαι πάντα τὰ μεταλαμβάνοντα αὐτῶν κατὰ τὰς οἰκείας δυνάμεις ῥυθμίζουσι.

Es gleicht nämlich der Hinweg von der Eins an bis hin zu den beiden Seitenzahlen, die bei den Rechtecken die Bedeutung von Wendepunkten haben werden, einer Entstehung, die vom gemeinsamen Ursprung aller voranschreitet, sozusagen bis zu ihrer Vollendung (zu den Wendepunkten selbst). Der Rückweg von diesen aber stellt sich dar als eine Art von Auflösung und Abnahme der Kräfte durch Vergehen; deshalb wird auch mit gutem Grund die Eins sich zur Zusammensetzung auch der Rechtecke selbst darbieten, da sie die Bedeutung der Form beinhaltet, wird jedoch nicht mehr helfen bei der Auflösung und - sozusagen - beim Vergehen, sondern wird dies der Zwei überlassen, die die Bedeutung der Materie hat. So sehen wir ja auch bei den natürlichen Dingen, dass alles Entstehende seine Entstehung und Wesen und Einheit jeweils entsprechend der **[78]** Form erhält, während das Vergehen und das Nicht-, sondern Unbestimmt-Sein entsprechend der Materie erfolgt. Denn ein solches Sein, das Form und Gestalt nicht mehr besitzt, ist wohl nur mehr Materie, unbestimmt und ohne Quantität und Qualität, wegen der Unbestimmtheit und Ungleichheit der Zweiheit.

Aus diesem Grund stellte sich die Zweiheit ganz eigentlich als formbildend für die Rechtecke heraus, die von ihrer eigenen Macht den Rechtecken an den Seiten mitteilt, das heißt von der Ungleichheit. Denn Zwei ist das Ungleiche, nämlich Überschuss und Mangel; die Eins hingegen gibt den Quadraten ihre Form, weshalb diese auch gleichmal gleich sind; Ursprung nämlich des Gleichen sind die Eins und die Einheit, jedenfalls, wenn das Gleiche so viel wie Eins zu Eins ist und das Gleiche nach *einem* Verhältnis gleich ist.

Es ist nun offenbar, dass in gleicher Weise alles im Kosmos aus Form und Materie entstand und weiter entsteht, so wie auch alles, was in Zahlen geschieht, durch Einheit und Zweiheit entsteht. Zuerst nämlich ist nun jeder dieser beiden Uranfänge formbildend für die beiden Längen der Zahl (ich meine die gerade und ungerade); zweitens aber ist der eine Urgrund formbildend für die Quadratzahlen, der andere für die Rechteckzahlen, und ihre Kräfte gehen keineswegs ineinander über, sondern stehen sich als Erzfeinde gegenüber, und jede von beiden gestaltet das, was an ihr teilhat, nach ihrer eigenen Bedeutung.

Wie es nämlich die Natur des Warmen ist, das zu erwärmen, was ihm nahekommt, des Kalten, zu kühlen, und des Feuchten, nass zu machen, so sind auch die Urgründe des Seienden nicht mit den übrigen Kräften vermischt und gestalten alles, was an ihnen teilhat, entsprechend ihren eigenen Kräften.

πέφυκε δὲ τὸ μὲν ἓν καὶ ἡ μονὰς ὁρίζειν καὶ περαίνειν καὶ μορφοῦν καὶ ἰσάζειν καὶ σῴζειν καὶ ὅλως ἑνοποιεῖν, ἡ δὲ δυὰς μερίζειν καὶ διχάζειν καὶ φθείρειν καὶ ὅλως ἀοριστaίνειν, διόπερ ἐν τῇ εἰρημένῃ γενέσει τῶν ἑτερομηκῶν εἰς τὴν αὐτῆς δυάδος σύστασιν ἡ μονὰς οὐκ**[79]**έτι ἑαυτὴν παρέξει, ἀλλ' αὐτὴ καθ' αὑτὴν ἡ δυὰς ὡς ἂν ἀρχὴ οὖσα καὶ αὐτὴ εὐθὺς ἑτερομηκῶν ἐστι πυθμήν.

διότι δὲ ἐξ ἀρχῆς οὐκ ἂν εἴη, φησὶν ὁ Πλάτων,[20] οὐκ ἂν ἔτι ἀρχὴ εἴη. εὑρίσκεται δὲ ἀναλόγως καὶ ἐν ταῖς κοσμικαῖς ἀρχαῖς ὁ δημιουργὸς θεὸς μὴ ὢν τῆς ὕλης γεννητικός, ἀλλὰ καὶ αὐτὴν ἀίδιον παραλαβών, εἴδεσι καὶ λόγοις τοῖς κατ' ἀριθμὸν διαπλάττων καὶ κοσμοποιῶν.

εἰς δέ γε τὰς τῶν λοιπῶν ἑτερομηκῶν συστάσεις κατὰ μόνην τὴν πρόοδον, ὡς ἔφαμεν, ἐπιδώσει αὑτὴν ἡ μονάς, οὐκέτι δὲ καὶ εἰς τὴν ἐπάνοδον, οἷον οὕτως ἐκ τοῦ ἓν καὶ δύο καὶ τρία ὁ ϛʹ γίνεται ἑτερομήκης συνεχὴς ὢν τῇ δυάδι καὶ πλευρὰς ἔχων δυάδα καὶ τριάδα, καίπερ καμπτήρων ἀμφότεραι λόγον ἔχουσαι.

ἐν μὲν γὰρ τοῖς τετραγώνοις διὰ τὴν ταυτότητα καὶ ἰσότητα τῶν πλευρῶν ἕνα καμπτῆρα εἶναι συνέβαινεν, ὃς δὴ πλευρικὸς ἦν καθ' ἕκαστον τετράγωνον ἀριθμός· ἐνταῦθα δὲ ἐπὶ τῶν ἑτερομηκῶν, ὅτι διαφόρους καὶ ἀνίσους εἶναι δεῖ τὰς πλευράς, δύο καμπτήρων ἐδέησε, κατ' ἐπάνοδον δ' ἐπισυνθεῖναι κωλυόμεθα ἀριθμὸν ὑπὸ τοῦ ϛʹ, ἐπείπερ ὑπόκειται ἡ μονὰς ἀνεπίδεκτος οὖσα τῆς ἐπανόδου καὶ ἀναλύσεως·

ἡ δὲ δυὰς οὐδὲν ἔλαττον τῆς τριάδος καμπτὴρ ὑπάρχει, ἀλλ' ἰσοκρατῶς ἀμφότεροι πλευρικοί εἰσιν ἀριθμοὶ τοῦ ϛʹ ἑτερομήκους ἐκ τοῦ δὶς τρία <ἢ> ἐκ τοῦ τρὶς βʹ ποιοῦντες αὐτόν. ἅπαξ δὲ χρὴ κατὰ μόνην τὴν πρόοδον ἐκ πάντων ἑτερομηκῶν τοὺς καμπτῆρας λαμβάνεσθαι, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν τετρα**[80]**γώνων ἐποιοῦμεν. πάλιν ἐκ τῶν αʹ βʹ γʹ δʹ καὶ ἐξ ὑποστροφῆς μόνου τοῦ βʹ ὁ ιβʹ τρίτος ἑτερομήκης γίνεται, οὗ πλευραὶ δύο καμπτῆρες ὅ τε γʹ καὶ ὁ δʹ, ιβʹ τετράκι γʹ ἀποτελεῖται.

[20] Phaidros 245 D

Die Natur des Einen aber und der Einheit besteht nun in Begrenzen und Vollenden und Gestalten und Gleichmachen und Bewahren und gänzlich im Vereinigen; die Zweiheit aber teilt und trennt und zerstört und macht überhaupt unbestimmt. Deshalb wird bei der besprochenen Entstehung der Rechteckzahlen die Einheit nicht mehr die Hand zur Zusammenstellung gerade der Zweiheit reichen, **[79]** nein, die Zweiheit selbst für sich (wie ein Urgrund) wird auch ihrerseits ohne weiteres die Grundform von Rechtecken <mit ungleichlangen Seiten> sein.

Weil sie aber nicht von Anfang an ist, sagt Platon < >, ist sie auch wohl kein Anfang mehr. In gleicher Weise findet sich aber auch in den kosmischen Anfängen der Schöpfergott nicht als Erschaffer der Materie, sondern er findet auch diese als ewig vor und gestaltet sie in zahlenmäßigen Formen und Verhältnissen und gestaltet so den Kosmos.

Zu den Zusammensetzungen aber der übrigen Rechteckzahlen wird sich die Einheit nur für den Hinweg, wie wir sagten, hergeben, nicht mehr jedoch für den Rückweg; so entsteht zum Beispiel aus der Eins, der Zwei und Drei die Rechteckzahl 6, die mit der Zweiheit unmittelbar zusammenhängt und die Seiten zwei und drei hat, obwohl beide Zahlen die Bedeutung von Wendepunkten haben.

Bei den Quadratzahlen nämlich ergab es sich, dass es wegen der Identität und Gleichheit der Seiten nur einen Wendepunkt gab, der nun bei jedem Quadrat die Seitenzahl angab. Weil hier aber, bei den Rechtecken, die Seiten verschieden und ungleich sein müssen, brauchte es zwei Wendepunkte; beim Rückweg aber werden wir durch die 6 gehindert, noch eine Zahl hinzuzufügen, weil die Eins zugrunde liegt, die den Rückweg und die Auflösung nicht zulässt.

Die Zweiheit aber ist trotzdem Wendepunkt der Dreiheit, doch sind beide Zahlen in gleich starker Weise Seitenzahlen der Rechteckzahl 6, indem sie diese aus zweimal drei oder aus dem Produkt von dreimal 2 hervorbringen. Man muss aber einmal nur, beim Hinweg, die Wendepunkte aus allen Rechteckzahlen nehmen, wie wir es auch bei den Quadraten **[80]** machten. Wiederum entsteht aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 und nur aus der 2 auf dem Rückweg die dritte Rechteckzahl 12, deren zwei Seiten die beiden Wendepunkte, die 3 und die 4, sind, und 12 ist viermal 3 <$1 + 2 + 3 + 4 + 2 = 12$; 3 und 4 sind Wendepunkte; $3 \cdot 4 = 12$>.

καὶ μὴν ἐκ τοῦ α′ β′ γ′ δ′ ε′ καὶ ἐξ ὑποστροφῆς γ′ β′ ὁ ἑξῆς εὔτακτος κ′ γίνεται, πλευρὰς ἔχων καὶ αὐτὸς τοὺς δύο καμπτῆρας, καὶ ἐκ τοῦ τετράκι πέντε ἢ πεντάκι τέσσαρα γεννώμενος, καὶ τοῦτο μέχρι παντὸς συμβήσεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον. ἔσται οὖν καὶ τοῖς ἑτερομήκεσι ποικίλη ἡ γένεσις, καθὰ καὶ τοῖς τετραγώνοις, καὶ κατὰ σύνθεσιν καὶ κατ' ἔγκρασιν καὶ κατὰ τὸν εἰρημένον δίαυλον. κατὰ μὲν ἔγκρασιν, ὡς ἐγίνοντο ἐκεῖνοι ἐκ τοῦ ἅπαξ α′ καὶ δὶς β′ καὶ τρὶς γ′ καὶ τετράκι δ′ καὶ ἐφοσονοῦν, οὕτως οἱ ἑτερομήκεις γενήσονται ἐκ τοῦ ἅπαξ β′ καὶ δὶς γ′ καὶ τρὶς δ′ καὶ τετράκι ε′ καὶ ἐφεξῆς, κατὰ συνδυασμὸν ἐγκιρναμένων δύο ἀριθμῶν μονάδι ἀλλήλων διαφερόντων.

κατὰ δὲ σύνθεσιν, ὡς ἐκεῖνοι ἦσαν πρῶτον εἷς περισσὸς εἶτα δύο εἶτα τρεῖς εἶτα τέσσαρες καὶ ἀεὶ ὁμοίως ***, οὐκέτι κατὰ συνδυασμὸν ἀλλὰ κατὰ πρόσθεσιν τὴν ἐπὶ τοῖς ἐξ ἀρχῆς. περὶ δὲ τῆς κατὰ τὸν λεγόμενον δίαυλον αὐτῶν γενέσεως μικρῷ πρόσθεν εἴρηται. λέγεται δὲ κατ' ἔγκρασιν ἡ εἰρημένη πλάσις ἑκατέρου εἴδους, ὅτι ὁ γενόμενος τοὺς γνώμονας εἰλικρινεῖς ἀποδοῦναι οὐκέτι ἔχει διὰ τὴν σύμφθαρσιν, ἀλλ' ἐν ταῖς διακρίσεσι συμφαίνονται ἀλλήλοις, οἷον φέρ' εἰπεῖν ὁ ς′ ἐκ τοῦ δὶς τρεῖς **[81]** ὧν οὐ λύεται εἰς τὸν δύο καὶ τρία, ἀλλ' ἡ σύμφθαρσις πλέον τι τῆς ποσότητος τῶν γνωμόνων ἀπετέλεσε.

τοσαυτάκις γάρ ἐστι θάτερος τῶν γνωμόνων ἐν τῷ γεννωμένῳ, ὅσοσπερ ὁ σύζυγος αὐτοῦ ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο συνεμφαίνεσθαι ἀλλήλοις εἴρηνται, καθὰ καὶ ἐπὶ τῶν ἐγκιρναμένων ὑγρῶν συμβαίνει χυλῶν τε καὶ χυτῶν καὶ τηκτῶν καὶ τῶν ὁμοίων· οὐ γὰρ ἔστιν εἰς τὰ ἐξ ἀρχῆς τὴν διάκρισιν γενέσθαι διὰ τὸ συνεφθάρθαι καὶ συνεμφαίνεσθαι τὰς ποιότητας.

κατὰ δὲ παράθεσιν καὶ σύνθεσιν εἴρηται ἡ ἑτέρα πλάσις, ὅτι δυνατὸν λύεσθαι τοὺς ἀποτελουμένους εἰς τοὺς ἐξ ὧν συνετέθησαν, οἷον τὸν ς′ ἐκ τοῦ β′ καὶ δ′ συγκείμενον δυνατὸν διελεῖν εἰς τοὺς αὐτούς, ὥστε καὶ πᾶν πλῆθος κατὰ σωρείαν ἢ κατὰ συναγελασμὸν συγκείμενον εἰς ἑνιαῖα διακρῖναι.

Und auch aus der Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5 und beim Rückweg aus den Zahlen 3 und 2 entsteht die sich in guter Ordnung <als 4.> anschließende Rechteckzahl, die 20, die ihrerseits als Seitenlängen die beiden Wendezahlen <4 und 5> hat und aus viermal fünf oder fünfmal vier entsteht, und dies wird nach der gleichen Methode immer weiter so vor sich gehen. Nun werden auch die Rechteckzahlen auf verschiedene Weise entstehen, wie ja auch die Quadratzahlen, und zwar nach Zusammensetzung, nach Mischung <Multiplikation> und dem geschilderten Hin- und Herweg. Wie die Quadratzahlen durch Mischung entstanden aus einmal 1 und zweimal 2 und dreimal 3 und viermal 4 und so immer weiter, so werden die Rechteckzahlen entstehen aus einmal 2 und zweimal 3 und dreimal 4 und viermal 5 und so fort, indem immer zwei nebeneinander stehende Zahlen, die um eins voneinander differieren, miteinander vermischt werden.

Nach der Zusammensetzung aber entstehen sie, wie jene <Quadrate> waren: Zuerst Eins (ungerade), dann zwei, dann drei, dann vier und immer so fort, <und so werden auch die Rechteckzahlen sein, zuerst Eins (gerade), dann zwei, dann drei, dann vier und immer so fort>, und zwar nicht mehr gemäß einer Verdoppelung, sondern durch Hinzufügung an die Anfangszahlen <2 + 4; 6 + 6; 12 + 8; 20 + 10 usw.>. Über ihre Entstehung aber nach dem sogenannten Hin- und Herlauf wurde kurz zuvor gesprochen. Man nennt aber "nach Beimischung" die genannte Bildung beider Formen, weil die Ergebniszahl <Produkt> die Gnomone <Faktoren> nicht mehr klar ergeben kann wegen des Ineinanderfließens <der Verschmelzung>, sondern diese gemeinsam miteinander in den Unterscheidungen erscheinen, wie zum Beispiel die 6, die aus zweimal drei **[81]** entstanden ist, nicht nach zwei und drei aufgelöst wird, sondern die Verschmelzung etwas mehr als die Quantität der Gnomone ergab.

Ebenso oftmals nämlich ist einer der beiden Gnomone in dem Produkt enthalten, wie oft sein Gefährte <der andere Faktor> da ist, und deshalb sagt man, sie erschienen gemeinsam miteinander, wie dies auch bei zusammengemischten Flüssigkeiten geht, bei Säften und Zusammengegossenem und Geschmolzenem und ähnlichen Dingen; ist es doch nicht möglich, die Analyse hier bis zu den Anfangsstoffen durchzuführen, weil ihre Qualitäten <bei der Mischung> verschwanden und nun nur mehr gemeinsam auftreten.

Die andere Bildung heißt "nach Nebeneinanderstellung" oder "Zusammenstellung" <Summe>, weil es möglich ist, die Ergebniszahlen in die Zahlen aufzulösen, aus denen sie zusammengesetzt sind, wie es zum Beispiel möglich ist, die 6, die aus 2 und 4 besteht, in eben diese Zahlen zu zerlegen, so dass auch jede Menge, die durch Addition oder Zusammenscharung entstand, in ihre einfachen Teile zerlegt werden kann.

μόνη δὲ ἀπὸ πάντων ἀριθμῶν ἡ δυάς, ὡς ἔμπροσθεν ἐμάθομεν, τὸ κατ' ἔγκρασιν τῷ κατὰ σύνθεσιν ἴσον ἀποτελεῖ, τῶν μετ' αὐτὴν ἀριθμῶν πλέον τὸ κατὰ σύγκρασιν τοῦ κατὰ σύνθεσιν ποιούντων, τῆς δὲ πρὸ αὐτῆς μονάδος ἀνάπαλιν ἔλαττον·

διόπερ αὐτὴν ἴσην καὶ δικαίαν οἱ ἀπὸ Πυθαγόρου ἐκ τοῦ συμβαίνοντος ἐκάλουν, καὶ ἐκ τοῦ τοιοῦδε τὸ σπερματικὸν αὐτῆς καὶ ἀρχοειδὲς γνωρίζεται· ὡς γὰρ ἡ μονὰς *** καὶ σπερματικῶς ἀδιακρίτους τοὺς ἐν ἀριθμῷ λόγους περιέχει, οὕτω καὶ ἡ δυὰς συγκεχυμένον καὶ ἀδιάφορον μόνον περιέξει τὸ τῆς ἐγκράσεως καὶ τὸ τῆς παραθέσεως ἰδίωμα, ὅπερ οὐδὲ **[82]** τῇ μονάδι ὑπάρξει, ἀλλ' ἔσται δυάδος ἴδιον. καὶ ἐν τοῖς φυσικοῖς δ' ἂν εὕροιμεν τὰ σπέρματα πάντα τοὺς λόγους τῶν ἀποτελεσθησομένων ἐξ αὐτῶν ἀδιακρίτους καὶ συγκεχυμένους ἔχοντα, ὡς ἂν δυνάμει ὄντα ἐκεῖνα ἃ ἐξ αὐτῶν γενήσεται.

πάλιν οὖν ἐξ ἄλλης ἀρχῆς ἐπεὶ οἱ μὲν τετράγωνοι δυνάμεις εἰσὶν ἰδίῳ τινῶν μήκει αὐξηθέντων ἀριθμῶν, ἑτερομήκεις δὲ οὐκ ἰδίῳ ἀλλ' ἑτέρῳ, οὐκ ἀπεικότως ἑτερομήκεις ἐκλήθησαν, οὗ κατὰ ἀντιδιαστολὴν τοὺς τετραγώνους οὐκ ἦν ἀπρεπὲς ἰδιομήκεις καλεῖν.

οἱ δὲ παλαιοὶ[21] ταὐτούς τε καὶ ὁμοίους αὐτοὺς ἐκάλουν διὰ τὴν περὶ τὰς πλευράς τε καὶ γωνίας ὁμοιότητα καὶ ἰσότητα, ἀνομοίους δὲ ἐκ τοῦ ἐναντίου καὶ θατέρους τοὺς ἑτερομήκεις.

ἐν δὲ τῇ ἐκθέσει ἑκατέρου εἴδους οἱ μὲν ἕνα παρ' ἕνα περισσοὶ καὶ ἄρτιοι γενήσονται, ὅτι οἱ τοιοῦτοι αὐτοὺς αὐξάνουσιν· οἱ δ' ἑτερομήκεις πάντες ἄρτιοι, ὅτι περισσὸς ἄρτιον ἢ ἄρτιος περισσὸν μηκύνει, πᾶς δὲ περισσὸς κατ' ἄρτιον αὐξηθεὶς ἄρτιον γεννᾷ.

καὶ ἐπεὶ ἐνταῦθα λόγου ἐσμέν, ἰστέον ὅτι χρήσιμον ἡμῖν τοῦτο ἔσται τὸ παράδειγμα εἰς τὸν ἐν τῇ Πλάτωνος πολιτείᾳ γαμικὸν ἀριθμόν,[22] ἔνθα φησὶν ἐκ δύο ἀγαθῶν ἀγαθογονίαν πάντως ἔσεσθαι καὶ ἐκ δύο τῶν ἐναντίων τὸ ἐναντίον, ἐκ δὲ μικτῶν πάντως κακογονίαν οὐδέποτε δὲ ἀγαθογονίαν.

---

[21] vgl. Theologoumena Arithmeticae 77, 19
[22] 546 B

Allein aber von allen Zahlen ergibt die Zwei, wie wir vorhin lernten, bei Multiplikation oder Addition das Gleiche, während die Zahlen nach ihr mehr nach Multiplikation als nach Addition ergeben, die Eins aber, die vor ihr <der 2> steht, wiederum weniger <2 + 2 = 4; 2 · 2 = 4; 3 + 3 = 6; 3 · 3 = 9; 1 · 1 = 1; 1 + 1 = 2.>.

Deshalb nannten die Pythagoreer die Zwei "gleich" und "gerecht" wegen dieser Eigenschaft, und an dieser Art erkennt man auch ihre schöpferische und elementare Natur. Wie nämlich die Eins die Verhältnisse in der Zahl <elementar> und schöpferisch, aber ungeschieden in sich einschließt, so wird auch die Zwei die Eigenheit der Mischung und der Zusammenstellung nur vermischt und nicht unterschieden in sich bergen, eine Eigenschaft, die nicht einmal **[82]** die Eins besitzt, sondern die nur der Zwei eignet. Auch in den Dingen der Natur finden wir wohl, dass alle Samen die Verhältnisse, die sich aus ihnen verwirklichen werden, ungeschieden und vermischt in sich tragen, wie wenn das potentiell vorhanden wäre, was aus ihnen entstehen wird.

Wiederum nun, von einem anderen Ausgangspunkt aus: Da die <gleichseitigen> Vierecke Quadrate sind, wobei bestimmte Zahlen mit ihrer eigenen Seitenlänge multipliziert wurden, die Rechtecke aber nicht mit ihrer eigenen, sondern einer anderen Seitenlänge multipliziert wurden, nannte man diese nicht unpassend "ungleichseitig", wobei es zur Unterscheidung durch Gegenüberstellung ebenso nicht unangemessen war, die Quadrate als "gleichseitig" zu bezeichnen.

Die Alten aber nannten diese Figuren "identisch" und "ähnlich" wegen der Identität und Gleichheit bei den Seiten und Winkeln <der Quadrate>; „unähnlich" aber im Gegensatz dazu und "entgegengesetzt" nannten sie die <ungleichseitigen> Rechtecke.

In der Reihe aber jeder einzelnen der beiden Formen werden die einen <die Quadratzahlen> abwechselnd ungerade und gerade werden, weil die derartigen Zahlen sie vermehren. Die Rechteckzahlen aber sind alle gerade, weil eine ungerade Zahl eine gerade oder eine gerade Zahl eine ungerade multipliziert, jede ungerade Zahl aber mit einer geraden malgenommen eine gerade Zahl ergibt.

Und weil wir in unserer Darstellung bis hierher gekommen sind, muss man wissen, dass uns dieses Beispiel von Nutzen für das Verständnis der "Heiratszahl" in Platons "Politeia" sein wird, wo er sagt, aus zwei Gütern werde grundsätzlich die Entstehung des Guten erfolgen und aus den zwei Gegensätzen das Entgegengesetzte, aus Gemischtem aber gehe grundsätzlich Schlimmes, niemals aber Gutes hervor.

καὶ γὰρ ἐκ μὲν τῆς τῶν περισσῶν καθ' ἑαυτοὺς συνόδου καὶ ἐπισυνθέσεως ἡγουμένης μονάδος ἐγίνοντο τετράγωνοι τῆς τἀγαθοῦ φύσεως ὄντες ἀπὸ τοιούτων· αἰτία δὲ τούτου ἥ **[83]** τε ἰσότης καὶ πρὸ ταύτης τὸ ἕν· ἐκ δὲ τῆς τῶν ἀρτίων ἡγουμένης δυάδος ἑτερομήκεις τῆς ἐναντίας φύσεως ὄντες, διότιπερ καὶ οἱ γεννήτορες· πάλιν δὲ αἰτία τούτου ἥ τε ἀνισότης καὶ πρὸ ταύτης ἡ ἀόριστος δυάς. καὶ εἰ κρᾶσις δὲ γένοιτο καὶ ὡς ἂν εἴποι τις γάμος ἀρτίου καὶ περισσοῦ, οἱ γεννώμενοι ὄγκοι καὶ τῆς καθ' ἑκατέρου φύσεως εἴτε μονάδι διαφέροιεν οἱ γεννήτορες εἴτε καὶ μείζονί τινι ἀριθμῷ· ἢ γὰρ ἑτερομήκεις ἢ προμήκεις οἱ ἀποτελούμενοι.

καὶ πάλιν ἐκ μὲν τετραγώνων ἀλλήλοις μιγέντων οἱ γινόμενοι τετράγωνοι, ἐκ δὲ ἑτερομηκῶν ὅμοιοι, ἐκ δὲ μικτῶν οὐδέποτε μὲν τετράγωνοι πάντως δὲ ἑτερογενεῖς, καὶ τοῦτό φησιν ὁ θειότατος Πλάτων παριδόντας τοὺς τῆς πολιτείας αὐτοῦ ἄρχοντας καὶ ἀρχούσας, διὰ τὸ μὴ τεθράφθαι ἐν τοῖς μαθήμασιν ἢ εἰ καὶ τραφεῖεν παρενθυμηθέντας, τοὺς γάμους φύρδην ἀναμίξειν, ἀφ' ὧν φαῦλοι γενόμενοι οἱ ἔγγονοι ἀρχὴ στάσεως καὶ διαφορᾶς τῇ συμπάσῃ πολιτείᾳ γενήσονται.

ἵνα δὲ καὶ μάθωμεν τὴν ἑκατέρου εἴδους τετραγώνων καὶ ἑτερομηκῶν, ἐναντιωτάτης περ ὄντων φύσεως, ἐναρμόνιον καὶ συμφυεστάτην σύζευξιν, ἐκθετέον στιχηδὸν καὶ παραλλήλως ἑκατέρους ἀπὸ τῆς οἰκείας ἀρχῆς, τετραγώνους μὲν ἀπὸ μονάδος ἀπὸ δὲ δυάδος ἑτερομήκεις, οὕτως·

α′	δ′	θ′	ις′	κε′	λς′	μθ′	ξδ′	πα′	ρ′
β′	ς′	ιβ′	κ′	λ′	μβ′	νς′	οβ′	ϙ′	ρι′

Aus dem Zusammentreffen nämlich der ungeraden Zahlen an sich und aus ihrer Zusammensetzung unter Anführung der Eins entstanden Quadratzahlen, die von der Natur des Guten sind von solchen Zahlen her; der Grund dafür **[83]** sind die Identität und noch vor dieser das Eine; aus der Zusammensetzung aber der geraden Zahlen unter Führung der Zwei entstanden die Rechteckzahlen, die von entgegengesetzter Natur sind, weil auch ihre Erzeuger <Faktoren> von solcher Art sind. Und wiederum ist die Ursache davon die Ungleichheit und vor dieser die unbegrenzte Zweiheit. Und geschähe nun eine Mischung und - wie man sagen könnte eine Hochzeit von Geradem und Ungeradem, dann würden die entstehenden Mengen auch der Natur der beiden Teile entsprechen, ob sich nun die Faktoren um eins unterscheiden oder auch um irgendein größere Zahl, denn die Endprodukte wären entweder Rechteckzahlen oder längliche Zahlen.

Und wiederum sind die Produkte von Quadraten, die miteinander verbunden sind, ebenso Quadrate, und aus den ungleichlangen entstehen diesen ähnliche Zahlen <12 = 3 · 4; 72 = 8 · 9; 12 · 72 = 27 · 32>, aus den gemischten aber <Quadratzahlen mal Rechteckzahlen> entstehen niemals Quadrate, sondern grundsätzlich Zahlen einer anderen Gattung, und dies beachten, wie der göttlichste Platon sagt, die Herrscher und Herrscherinnen seines Staates nicht, weil sie nicht mit den mathematischen Wissenschaften aufgewachsen sind, oder, wenn sie es wären, vernachlässigten sie sie und vermählten Männer und Bräute ohne Ordnung, und davon würden die Kinder schlecht und bildeten den Grund zu Aufruhr und Zwist im ganzen Staat.

Damit wir aber auch die harmonische und höchst natürliche Verbindung beider Formen, der Quadrat- und der Rechteckzahlen (obschon sie von ganz entgegengesetzter Natur sind), kennenlernen, müssen wir beide Zahlenreihen, beginnend mit ihrer jeweils eigenen Anfangszahl, zeilenweise und parallel in Reihe hinstellen, die Quadrate mit der Eins beginnend und die Rechteckzahlen mit der Zwei beginnend, und zwar so:

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
2	6	12	20	30	42	56	72	90	110

καὶ προσεκτέον πῶς ὁ πρῶτος τῶν θατέρων πρὸς **[84]** πρῶτον τῶν ταὐτῶν περιέχει τὸν πυθμενικὸν λόγον τοῦ πρώτου τῶν πολλαπλασίων, ὁ δὲ δεύτερος πρὸς δεύτερον ἀπὸ πυθμένος τοῦ πρώτου τῶν ἐπιμορίων, ὁ δὲ τρίτος πρὸς [γ′] τὸν τρίτον ἀπὸ πυθμένος τοῦ δευτέρου τῶν ἐπιμορίων, καὶ ὁ τέταρτος πρὸς τὸν τέταρτον ἀπὸ πυθμένος τοῦ τρίτου τῶν ἐπιμορίων, καὶ τοῦτο ἐφ' ὅσον τις θέλει ἐξετάζων εὑρήσει εὐτάκτως προχωροῦν. διαφορὰ δ' ἔσται αὐτοῖς πᾶσι πρὸς πάντας καθ' ἑκάστην συζυγίαν ἐξεταζομένοις ὁ ἑξῆς ἀπὸ μονάδος ἀριθμός. καθ' ἑαυτοὺς δὲ ἐξεταζομένων τῶν στίχων, ἐπὶ μὲν τῶν ὁμοίων οἱ ἀπὸ τριάδος περισσοὶ ἔσονται διαφοραί, ἐπὶ δὲ τῶν ἀνομοίων οἱ ἀπὸ τετράδος ἄρτιοι.

καὶ πάλιν ἑκάστη διαφορὰ τῶν ἀνομοίων σύνδυο λαμβανομένων πρὸς τὴν ὁμοιότητα τῶν ὁμοίων λόγον ἕξει ἐπιμόριον, πάντως δὲ οἱ λόγοι περισσώνυμοι γενήσονται· ἐπίτριτος γὰρ καὶ ἐπίπεμπτος καὶ ἐφέβδομος καὶ ἐπέννατος καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

πάλιν ἐκ πρώτου ὁμοίου καὶ δὶς τοῦ ὑπ' αὐτὸν ἀνομοίου <καὶ δευτέρου ὁμοίου> ὁ ἀποτελεσθεὶς ὅμοιός ἐστι, καὶ ἐκ τρίτου ὁμοίου καὶ δὶς τοῦ ὑπ' αὐτὸν ἀνομοίου καὶ τετάρτου ὁμοίου ὁ γενόμενος ὅμοιος, καὶ ἀεὶ οὕτως ποιοῦντες, ὥστε ἄρχειν τῆς προτέρας γενέσεως τὸ τέλος τῆς ὑστέρας, ὁμοίους πάντας γεννήσομεν.

εἰ δὲ ἀνάπαλιν ἀρξαίμεθα ἀπὸ τῶν ἀνομοίων ἄκρους αὐτοὺς τάσσοντες, μέσους δὲ τοὺς ὁμοίους καθ' ἑκάστην σύζευξιν, ἀνόμοιοι πάντες γενήσονται καὶ τῆς θατέρου φύσεως.

Und man muss darauf achten, wie die erste Zahl der zweiten Reihe **[84]** im Verhältnis zur ersten der ersten Reihe das Grundverhältnis des ersten der Vielfachen enthält <1 : 2 = 2 : 4>, wie die zweite Zahl im Verhältnis zur zweiten nach der Grundform <das Verhältnis> des ersten der Überteiligen < 6 : 4 = 3 : 2>, wie die dritte Zahl im Verhältnis zur dritten Zahl nach der Grundform <das Verhältnis> des zweiten der Überteiligen <12 : 9 = 4 : 3> enthält, und wie die vierte Zahl im Verhältnis zur vierten Zahl nach der Grundform <das Verhältnis> des dritten der Überteiligen <20 : 16 = 5 : 4> enthält, und dies wird man, soweit es einer nur überprüfen will, in guter Ordnung so voranschreitend finden. Wenn man aber alle Zahlen mit allen entsprechend der jeweiligen Paarung untersucht, wird sich als Unterschied jeweils die von der Eins ausgehend nächstfolgende Zahl herausstellen. Prüft man aber die Reihen für sich, werden bei den ähnlichen Zahlen <den Quadratzahlen> die ungeraden Zahlen von der Drei an die Differenz bilden; bei den unähnlichen Zahlen bilden die geraden Zahlen von der Vier an den Unterschied.

Und wiederum, wenn man bei den unähnlichen Zahlen <den Rechteckzahlen> immer zwei zusammennimmt, wird das Verhältnis des jeweiligen Unterschiedes gegenüber der gleichen Zusammenfassung bei den ähnlichen überteilig sein, und grundsätzlich werden die Proportionen ungerade Nenner haben, nämlich eineindrittel und eineinfünftel und eineinsiebtel und eineinneuntel und so weiter in Folge.

Wenn man wieder von der ersten ähnlichen und zweimal von der unähnlichen unter ihr <und von der zweiten ähnlichen >die Summe zieht, ist das Ergebnis eine ähnliche <1 + (2 + 2) + 4 = 9>; ebenso ist die Summe aus der dritten ähnlichen und zweimal der unähnlichen unter ihr und der vierten ähnlichen wieder eine ähnliche <9 + (12 + 12) + 16 = 49>; und wenn wir immer so verfahren, dass wir den Anfang der neuen Erzeugung das Ende der vorhergehenden bilden lassen, werden wir grundsätzlich ähnliche <Zahlen> erzeugen.

Wenn wir aber wieder mit den unähnlichen Zahlen beginnen, indem wir sie selbst als Randzahlen verwenden, in die Mitte aber entsprechend jeder Verbindung die ähnlichen stellen, werden lauter unähnliche <Zahlen> entstehen und zwar von entgegengesetzter Natur <2 + 1 + 1 + 6 = 10; 6 + 4 + 4 + 12 = 26; 12 + 9 + 9 + 20 = 50>.

εἰ δὲ μὴ τοὺς μεσοταγεῖς μεσεμβολοίημεν ὁμοίους, ἀλλὰ τοὺς ἐφεξῆς **[85]** ἀεὶ καθ' ἑκάστην γένεσιν, ἄκρους τηροῦντες τοὺς αὐτοὺς ἀνομοίους, οἱ παραλειφθέντες ἔσονται ὅμοιοι ὅ τε ιϛʹ καὶ ὁ λϛʹ καὶ ὁ ξδʹ καὶ οἱ ἀνάλογον. καὶ οὗτοι μὲν ἄρτιοι πάντες, ὅτι οἱ μεσεμβολούμενοι ὅμοιοι κἂν περισσοὶ ὦσι δὶς λαμβανόμενοι μετὰ ἀρτίων τῶν ἀνομοίων ἄκρων ἀρτίους ποιοῦσι· δὶς γὰρ πᾶς περισσὸς ἄρτιος γίνεται· οἱ δὲ πρότεροι πάντες περισσοί, διότι ὁ ἕτερος τῶν ὁμοίων ἄκρος πάντως ἦν περισσὸς καὶ διὰ τὸ ἅπαξ λαμβάνεσθαι τὴν περισσότητα ἐφύλαττον.

ἡ δὲ τῶν κατὰ τοὺς αὐτοὺς τῶν γνωμόνων σύζευξις εὐτάκτους τινὰς λόγους ἀποφαίνει· ἐκ μὲν γὰρ τοῦ ἅπαξ πρώτου ὁμοίου καὶ δὶς πρώτου ἀνομοίου καὶ ἅπαξ δευτέρου ὁμοίου ὁ ὑποδιπλάσιος λόγος φύσεται, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου ὁμοίου καὶ δὶς τοῦ ὑπ' αὐτὸν ἀνομοίου καὶ τοῦ ἑξῆς ὁμοίου ὁ ὑφημιόλιος, καὶ κατὰ τὴν τρίτην σύζευξιν ὁ ἐπίτριτος καὶ κατὰ τὴν τετάρτην ὁ ἐπιτέταρτος καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

καὶ ἐν τῇ τῶν παραλελειμμένων ὁμοίων γενέσει ἡ σύζευξις τῶν γενομένων οὐκέτι μὲν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοὺς τρεῖς ὅρους καθ' ἑκάστην συζυγίαν ἀποφαίνει, ἀλλ' ἐν διαφόροις, οὐ μὴν ἀνοικείοις γε, ἀλλὰ πάλιν τινὰ φυσικὴν εὐταξίαν καὶ συγγένειαν διπλασίου λόγου πρὸς ἡμιόλιον καὶ ἡμιολίου πρὸς ἐπίτριτον καὶ ἐπιτρίτου πρὸς ἐπιτέταρτον·

Wenn wir aber nicht die in der Mitte stehenden ähnlichen Zahlen als Mittelstücke einsetzen, sondern bei jeder Erzeugung **[85]** immer der Reihe nach die diesen folgenden <ähnlichen Zahlen; also 4 nach 1, 9 nach 4>, wobei wir die gleichen unähnlichen Zahlen als Außenzahlen beibehalten, dann werden die herausgekommenen Zahlen ähnliche <Zahlen> sein, so die 16 und die 36 und die 64 und analog alle weiteren <2 + 4 + 4 + 6 = 16; 6 + 9 + 9 + 12 = 36; 12 + 16 + 16 + 20 = 64>. Und diese sind alle gerade Zahlen, weil die in der Mitte eingeschobenen ähnlichen <Zahlen>, auch wenn sie ungerade sind, zweimal genommen mit den geraden äußeren unähnlichen <Zahlen> wieder gerade Zahlen ergeben; wird doch jede ungerade Zahl, doppelt genommen, gerade.

Die vorderen Zahlen aber <in 84, 18 - 24> sind alle ungerade, weil die zweite Außenzahl der ähnlichen <Zahlen> grundsätzlich ungerade war, und weil sie nur einmal genommen wurden und so ihre Ungeradheit beibehielten.

Die Verbindung der Gnomone aber entsprechend denselben Zahlen <Quadrat- und Rechteckzahlen> zeigt gewisse wohlgeordnete Verhältnisse. Denn aus der einmal genommenen ersten ähnlichen <Zahl> und zweimal der ersten unähnlichen Zahl und einmal der zweiten ähnlichen <Zahl> entsteht das doppelte Verhältnis <1; 2; 2; 4; also 1 : 2 = 2 : 4>. Aus der zweiten ähnlichen <Zahl> aber und zweimal der unähnlichen unter ihr und der folgenden ähnlichen entsteht das Verhältnis eineinhalbmal kleiner <4 : 6 = 6 : 9>; und nach der dritten Zusammenstellung entsteht das Verhältnis Eineindrittel <9 : 12 = 12 : 16>, nach der vierten das Verhältnis Eineinviertel und so in Folge weiter.

Und bei der Erzeugung der übergangenen ähnlichen Zahlen zeigt die Zusammenstellung der Entstehenden die drei Größen nicht mehr im gleichen Verhältnis entsprechend jeder Zusammenstellung, sondern in verschiedenen Verhältnissen, die jedoch nicht unpassend sind, sondern zeigt wiederum eine gewisse natürliche Ordnung und Verwandtschaft des doppelten Verhältnisses zum Eineinhalbfachen und des Eineinhalbfachen zum Eineindrittelfachen und des Eineindrittelfachen zum Verhältnis Eineinviertel.

ἐν μὲν γὰρ τοῖς β′ δ′ ς′ ὅροις διπλάσιος καὶ ἡμιόλιος λόγος ἐστίν, ἐν δὲ τοῖς ς′ θ′ ιβ′ ἡμιόλιος καὶ ἐπίτριτος, ἐν δὲ τοῖς ιβ′ ις′ κ′ ἐπίτριτος καὶ ἐπιτέταρτος καὶ ἑξῆς ἀναλόγως, μονάδι μεγαλωνυμωτέρως τοῦ δευτέρου λόγου πρὸς τὸν σύζυγον λεγο**[86]**μένου.

πάλιν ἕκαστος ὅμοιος μεθ' ἑκάστου ὁμοταγοῦς ἀνομοίου τρίγωνον ποιεῖ· οἱ δὲ γενόμενοι τρίγωνοι ἄρχοντος τοῦ τρία αἰεὶ παρ' ἓν γενήσονται οὗτοι γ′ ι′ κα′ λς′ νε′ οη′ ρε′ καὶ ἀνάλογον, παραλείποντες ἐκ τῆς εὐτάκτου τῶν τριγώνων πλάσεως τόν τε ς′ καὶ τὸν ιε′ καὶ τὸν κη′ καὶ τὸν με′ καὶ τὸν ξς′ καὶ τὸν ϙα′ καὶ τοὺς τούτοις ἀνάλογον. εἰ δὲ μὴ τῇ κατὰ παράλληλον μόνῃ συνθέσει χρησαίμεθα ἀλλὰ καὶ τῇ κατ' ἐμπλοπὴν συμπλέκοντες ἂν πρῶτον ἀνόμοιον δευτέρῳ ὁμοίῳ καὶ δεύτερον ἀνόμοιον τρίτῳ ὁμοίῳ καὶ τρίτον τετάρτῳ καὶ τέταρτον πέμπτῳ καὶ ἀεὶ ἀκολούθως, πάντες ἑξῆς σὺν τοῖς προτέροις ἀπὸ τριάδος οἱ τρίγωνοι φύσονται οὗτοι γ′ ς′ ι′ ιε′ κα′ κη′ λς′ με′ νε′ ξς′ οη′ ϙα′ ρε′ καὶ οἱ ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον.

πάλιν δὲ καὶ αὐτῶν τῶν καθ' αὑτοὺς τῶν ἀνομοίων τὰ ἡμίση τοὺς ἀπὸ μονάδος εὐτάκτους τριγώνους ποιήσει.

ἑκάστη δὲ διαφορὰ ἀνομοίων καθ' ἕκαστον πρὸς ὁμοίους λόγον ἕξει πρὸς οὓς ὧν ἐστι διαφορὰ οὐκ ἄτακτον· οὗ μὲν γὰρ ἡμίσεια ἔσται οὗ δὲ τρίτον, καὶ οὗ μὲν τρίτον οὗ δὲ τέταρτον, καὶ οὗ μὲν τέταρτον οὗ δὲ πέμπτον, καὶ ἀεὶ ἀκολούθως, ἀρχὴν δὲ παρέξει τῆς τοιαύτης εὐταξίας ἡ δευτέρα συζυγία τοῦ δ′ πρὸς ς′·

Denn in den Termen 2, 4, 6 ist das Verhältnis des Doppelten <4 : 2> und das eineinhalbfache Verhältnis <6 : 4> enthalten, und in den Größen 6, 9, 12 sind die Verhältnisse Eineinhalb und Eineindrittel gegeben <9 : 6 = $1\frac{1}{2}$; 12 : 9 = $1\frac{1}{3}$>, und in den Größen 12, 16, 20 stecken die Verhältnisse Eineindrittel und Eineinviertel <16 : 12 = $1\frac{1}{3}$; 20: 16 = $1\frac{1}{4}$> und so entsprechend weiter, wobei die jeweils zweite Proportion einen um eins größeren Nenner hat als die mit ihr verbunden **[86]** genannte <$1\frac{1}{4}$ ist die zweite im Verbund 16 : 12; 20 : 16 genannte Proportion und hat einen um eins größeren Nenner als $1\frac{1}{3}$>.

Wiederum bildet jede ähnliche Zahl mit jeder unähnlichen Zahl an gleicher Stelle eine Dreieckzahl <1 + 2 = 3; 4 + 6 = 10 usw.>; die entstehenden Dreieckszahlen, anfangend mit der Drei, und immer eine übersprungen, werden folgende Zahlen sein: 3, 10, 21, 36, 55, 78, 105 und so weiter in dieser Art; dabei lassen wir in der wohlgeordneten Bildung der Dreieckzahlen folgende aus: 6, 15, 28, dann 45, dann 66 und 91 und alle weiteren diesen entsprechenden <nämlich jede zweite Dreieckzahl>. Wenn wir jedoch die Zahlen nicht nur entsprechend der Summe in derselben Reihe anwenden, sondern auch in Zusammenflechtung die erste unähnliche Zahl mit der zweiten ähnlichen Zahl verflechten und die zweite unähnliche Zahl mit der dritten ähnlichen Zahl, die dritte <unähnliche Zahl> mit der vierten <ähnlichen> Zahl, die vierte mit der fünften und immer weiter in Folge, dann werden sich alle Dreieckzahlen nacheinander mit den eben genannten <3, 10, 21, 36 usw.> zusammen von der Drei an so ergeben: 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105 und alle folgenden bis ins Unendliche <Die beschriebenen Dreieckzahlen entstehen so: 2 + 4 = 6; 6 + 9 = 15; 12 + 16 = 28; 20 + 35 = 45 usw.; sie werden in die erste Reihe 3, 10, 21, 36 "eingeflochten">.

Wiederum aber werden die Hälften der unähnlichen Zahlen (diese für sich allein genommen) die wohlgeordneten Dreieckzahlen von der Eins an ergeben <2 : 2 = 1; 6 : 2 = 3; 12 : 2 = 6; 20 : 2 = 10; Reihe: 3, 6, 10, 15 usw.>.

Der jeweilige Unterschied aber der jeweiligen unähnlichen Zahlen zu den <über ihnen stehenden> ähnlichen Zahlen <6 - 4 = 2; 12 - 9 = 3; 20 - 16 = 4 usw.> wird eine wohlgeordnete Proportion im Verhältnis zu den Zahlen aufweisen, deren Unterschied sie angibt; einmal nämlich wird die Zahl die Hälfte sein, ein andermal das Drittel, und einmal das Drittel, dann das Viertel, und einmal das Viertel, dann das Fünftel und so immer in Folge. Den Beginn der so gearteten schön geordneten Reihe bildet die zweite Zusammenstellung, die der Vier mit der Sechs.

τῇ γὰρ πρώτῃ συζυγίᾳ τῇ α′ πρὸς δύο οὐχ ὑπάρξει τὸ τοσοῦτον διὰ τὸ ἀμερὲς εἶναι τὸ ἓν καὶ τὴν μονάδα εἴδους καὶ ταυτότητος λόγον ἔχουσαν.

πρώτη δὲ δυὰς ἐπιδεκτικὴ ἔσται μερισμοῦ καὶ διακρίσεως, τῆς θατέρου φύσεως οὖσα καὶ τὸν τῆς ὕλης λόγον ἀναδεδεγμένη,καὶ ἐπεὶ συζυγὴς οὖσα τῇ μονάδι δι' ἐκείνην ἐκωλύθη τῆς εἰρημένης εὐταξίας τῶν μορίων ἄρξαι, αὕτη δια**[87]**φορὰ οὖσα τῆς δευτέρας συζυγίας εὑρίσκεται, τοῦ μὲν τέσσαρα ἡμίσεια οὖσα, τοῦ δὲ ϛ′, γ^{ον}. ἀλλὰ καὶ πρὸς τὸν δ′ συγκρινομένη οὐδὲν ἧττον διαφορὰν πρὸς αὐτὸν φυλάττει.

καὶ ἐπειδὴ τῇ κατὰ τὰς διαφορὰς ποσότητι ἀδιαφοροῦσιν οἱ τρεῖς ὅροι οἱ β′ δ′ ϛ′, καὶ ποιότητι τῇ κατὰ τοὺς λόγους διαφέρουσι· διπλάσιος μὲν γὰρ ὁ δ′ τοῦ β′, ἡμιόλιος δὲ ὁ ϛ′ τοῦ δ′. ὁ δὲ αὐτὸς ϛ′ πρὸς τὸν ἑξῆς ὁμοίως συγκρινόμενος τὸν θ′, ποιότητι μὲν οὐ διοίσει· τὸν γὰρ αὐτὸν ἡμιόλιον λόγον φυλάξει, ὑπόλογον ἑαυτὸν παρέχων, ὥσπερ καὶ πρὸς τὸν δ′ τοῦ αὐτοῦ λόγου πρόλογος ἦν· τῇ δὲ κατὰ τὴν διαφορὰν ποσότητι διοίσει, εἴ γε πρὸς μὲν τὸν δ′ δυάς ἐστιν ἡ διαφορά, πρὸς δὲ τὸν θ′ τριάς.

πάλιν ὁ θ′ πρὸς τὸν ϛ′ ἀλλὰ καὶ πρὸς τὸν ιβ′ συγκρινόμενος ποιότητι μὲν τῶν λόγων διοίσει, εἴ γε τοῦ μὲν ἡμιόλιος τοῦ δὲ ὑπεπίτριτός ἐστι, ποσότητι δὲ τῇ κατὰ τὰς διαφορὰς οὐ διοίσει· τριὰς γὰρ αὐτῷ διαφορὰ πρὸς ἑκάτερον.

καὶ καθόλου ἔνθα μὲν τῇ κατὰ τὰς διαφορὰς ποσότητι διαφέρουσι τρεῖς ὅροι οὕτως λαμβανόμενοι ὡς εἴρηται, ποιότητι κατὰ τοὺς λόγους ἀδιάφοροι ἔσονται· εἰ δὲ διαφέροιεν ποιότητι, ποσότητι ἀδιαφορήσουσι.

καὶ ἐξ ἀλλήλων δ' ἂν γνωρισθείησαν ὅμοιοί τε καὶ ἀνόμοιοι· ὁ γὰρ πρῶτος ἀνόμοιος ἐκ δὶς πρώτου ἐστὶν ὁμοίου, καὶ ὁ δεύτερος ὅμοιος ἐκ δὶς πρώτου ἐστὶν ἀνομοίου, ὁ δὲ δεύτερος ἀνόμοιος ἐξ ἑνὸς <καὶ> ἡμίσους δευτέρου ὁμοίου.

Denn die erste Paarung, die der Eins mit der Zwei, wird ein derartiges Verhältnis nicht bieten, weil die Eins unteilbar ist und die Einheit die Bedeutung von Form und Identität in sich schließt.

Als erste Zahl aber wird die Zwei Teilung und Unterscheidung zulassen, weil sie beide Naturen an sich hat und die Bedeutung der Materie in sich birgt; und weil sie mit der Eins gepaart ist, wurde sie von jener daran gehindert, den Anfang der geschilderten Ordnung der Brüche zu bilden; doch wird sich zeigen, **[87]** dass sie die Differenz der zweiten Paarung <4; 6> bildet, da sie die Hälfte von vier ist und ein Drittel von sechs. Aber auch mit der 4 verglichen hält sie dennoch den Unterschied <von 2> ihr gegenüber aufrecht.

Und da die drei Terme 2, 4, 6 keine Unterschiede aufweisen, was die Quantität der Differenzen angeht, unterscheiden sie sich auch durch die Qualität in den Verhältnissen; ist doch 4 das Doppelte von 2, und 6 ist eineinhalbmal so groß wie 4. Und die 6 selbst wird, wenn man sie mit der ihr <oben> folgenden Zahl, der 9, ebenso vergleicht, keinen Unterschied der Qualität aufweisen, denn sie wird das gleiche Verhältnis eineinhalbmal größer durchhalten, wobei die 6 sich als das Hinterglied darstellen wird <9 : 6>, wie sie auch gegenüber der 4 in demselben Verhältnis das Vorderglied war <6 : 4>. In der Quantität des Abstandes jedoch wird ein Unterschied sein, da doch <von der Sechs> zur 4 die Differenz zwei beträgt, zur 9 hin aber die Drei.

Wiederum aber wird sich die 9, verglichen mit der 6, verglichen aber auch mit der 12, in der Qualität der Verhältnisse unterscheiden, indem sie das Eineinhalbfache der 6 und dreiviertel von 12 ist; in der Quantität dagegen der Differenzen wird sie keine Unterschiede aufweisen, ist doch der Abstand zu beiden Zahlen je drei <6 + 3 = 9; 9 + 3 = 12>.

Und überhaupt gilt folgendes: Wo in der Quantität der Differenzen der drei Terme, die so genommen sind, wie beschrieben, sich unterscheiden, werden sie in der Qualität der Verhältnisse keine Unterschiede aufweisen. Zeigen sie jedoch Unterschiede in der Qualität <der Verhältnisse>, werden sie ohne Unterschied in der Quantität <der Differenzen> sein.

Und dabei werden ähnliche und unähnliche Zahlen durch einander erkannt werden. Denn die erste unähnliche Zahl ist aus zweimal der ersten ähnlichen entstanden <$1 \cdot 2 = 2$>, und die zweite ähnliche Zahl ist aus zweimal der ersten unähnlichen Zahl entstanden <$4 = 2 \cdot 2$>; die zweite unähnliche Zahl aber ist aus eineinhalbmal der zweiten ähnlichen Zahl entstanden <$6 = 4 \cdot 1\frac{1}{2}$>.

πάλιν ὁ τρίτος ἀνόμοιος ἐξ ἑνὸς καὶ τρίτου ἐστὶ τρίτου ὁμοίου, ὥσπερ καὶ τέταρτος ὅμοιος ἐξ ἑνὸς καὶ τρίτου **[88]** ἐστὶ τρίτου ἀνομοίου. ὁ δὲ τέταρτος ἀνόμοιος ἐξ ἑνὸς καὶ τετάρτου ἐστὶ τετάρτου ὁμοίου, καθὰ καὶ ὁ πέμπτος ὅμοιος ἐξ ἑνὸς καὶ τετάρτου ἔσται τετάρτου ἀνομοίου, ὁ δὲ πέμπτος ἀνόμοιος ἐξ ἑνὸς καὶ πέμπτου ἔσται τοῦ συζύγου, καὶ ὁ ἕκτος ἐξ ἑνὸς καὶ ἕκτου, καὶ ἀεὶ ἀκολούθως τὸ αὐτὸ συμβήσεται, τοῦ μορίου ὀνομαζομένου κατὰ τὴν ποσότητα τῆς χώρας ἑκάστου τῶν ἀνομοίων πρὸς τὸν ὁμοιοταγῆ ὅμοιον συγκρινομένου, οὗ καὶ τὸ μόριον ἔσται πρώτως, δευτέρως δὲ καὶ τοῦ ἀνομοίου πρὸς τὸν ἑξῆς ὅμοιον συγκρινομένου.

καὶ ἄλλα πολλὰ εὕροι τις ἂν γλαφυρὰ καθ' ἑαυτὸν ἐνατενίζων τῷ διαγράμματι καὶ ἀεὶ διεξετάζων τὴν ἐναρμόνιον σχέσιν τῶν ἐναντίων τῶν δύο δυνάμεων ταυτότητος καὶ ἑτερότητος ἐμφαινομένων τῇ τῶν τετραγώνων καὶ ἑτερομηκῶν ἐκθέσει.

ἱκανὸν δὲ ἐγκώμιον ἔσται τῆς δεκάδος ἡ κατὰ τὸν εἰρημένον δίαυλον τῶν τετραγώνων γένεσις, ὅταν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βαθμῷ τῶν ἀριθμῶν, ὧν ὁρίζει αὐτὴ ἡ δεκάς, ἀπὸ μονάδος ἡ πρόοδος μέχρις αὐτῆς γένηται καὶ πάλιν ἀπ' αὐτῆς ὡς ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος διορίζοντος μονάδας ἀπὸ δεκάδων ἡ ἐπάνοδος ὡς ἐπὶ μονάδα· ἔσται γὰρ ἐκ τῆς <δεκάδος> ὡς ἀπὸ συνθέσεως τετράγωνος ὁ ρ' ἀριθμός, καὶ αὐτὸς ὢν ἄρθρον διοριστικὸν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων, καὶ μονὰς τριωδουμένη καλούμενος πρὸς τῶν Πυθαγορείων, ὥσπερ καὶ ἡ δεκὰς δευτερωδουμένη μονὰς καὶ χιλιὰς τετρωδουμένη μονάς.

Wiederum entsteht die dritte unähnliche Zahl 9 aus Eineindrittel der dritten ähnlichen Zahl <12 = $1\frac{1}{3}$ mal 9>, wie auch die vierte ähnliche Zahl aus Eineindrittel [**88**] der dritten unähnlichen Zahl besteht <16 = $1\frac{1}{3}$ mal 12>. Die vierte unähnliche Zahl aber besteht aus Eineinviertel der vierten ähnlichen Zahl <20 = $1\frac{1}{4}$ mal 16>, und dementsprechend wird die fünfte ähnliche Zahl aus Eineinviertel der vierten unähnlichen Zahl bestehen <25 = $1\frac{1}{4}$ mal 20>; die fünfte unähnliche Zahl aber wird aus Eineinfünftel ihres Partners bestehen <30 = $1\frac{1}{5}$ mal 25>, die sechste unähnliche Zahl aus Eineinsechstel <ihres Partners 42 = $1\frac{1}{6}$ mal 36>, und immer wird sich in weiterer Folge das Gleiche einstellen, wenn man den Bruchnenner nach der Platzzahl der jeweiligen unähnlichen Zahl festsetzt und mit der ähnlichen Zahl an der gleichen Stelle in der Reihe vergleicht <z.B. 20 ist in der (unteren) Reihe die 4. Rechteckzahl; es ist $1\frac{1}{4}$ der 4. Quadratzahl in der (oberen) Reihe, der 16, der Nenner also 4>. Von dieser <20> wird sie <4> in erster Linie den Bruch bilden, in zweiter Linie aber auch, wenn man die unähnliche Zahl mit der folgenden ähnlichen Zahl vergleicht <20 : 4; die folgende Quadratzahl (in der oberen Reihe) ist 25, zu der 20 im Verhältnis $1\frac{1}{4}$ steht, denn 20 mal $1\frac{1}{4}$ = 25>.

Die Zahl 10

Und noch viele andere Feinheiten kann herausfinden, wer für sich selbst seine Aufmerksamkeit auf die Tabelle richtet und stets die harmonische Relation nachprüft, die zwischen den beiden gegensätzlichen Kräften der Identität und der Verschiedenheit herrscht, die sich in der Reihung der Quadrat- und der Rechteckzahlen darstellen.

Ein hinreichendes Lob der Zehnzahl aber wird die Erzeugung der Quadrate nach der genannten Doppelbahnmethode sein, wenn im ersten Gang der Zahlen, deren Grenze die Zehn selbst bildet, der Hinweg von der Eins an bis zu ihr hin erfolgt und wiederum von ihr weg (wie von einer Zahl, die die Einheiten von den Zehnerzahlen abgrenzt) der Rückweg zur Eins hin vor sich geht <1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 100>. Es wird nämlich aus der Zehn wie durch Zusammensetzung die Quadratzahl 100 entstehen, die ihrerseits wieder das abgrenzende Glied zwischen Zehner- und Hunderterzahlen darstellt und von den Pythagoreern Dreiwegeeinheit genannt wurde, wie auch die Zehn Zweiwegeeinheit und die Tausend Vierwegeeinheit benannt sind.

πλευρὰ δὲ **[89]** ἔσται τοῦ ρʹ τετραγώνου αὐτὴ ἡ δεκάς, καὶ δύναμις αὐτῆς τὸ συγκεφαλαίωμα τῆς ἐπὶ ταύτῃ ἐπισωρείας τῶν ἐντὸς αὐτῆς ἀριθμῶν δὶς λαμβανομένων· οὕτω γὰρ καὶ διαύλῳ ἀπεικάσθαι εἴρηται ὅ τε κατὰ πρόοδον ὡς ἀπὸ ὕσπληγος τῆς ἀρχῆς καὶ ὁ κατ' ἐπάνοδον ὡς ἀπὸ καμπτῆρος τοῦ τέλους τρόπος τῆς ἐπισυνθέσεως τῶν ἀριθμῶν.

εἰ δὲ τῇ δεκάδι μηκέτι μὲν καμπτῆρι, ὕσπληγι δὲ χρησαίμεθα καὶ ἀρχῇ τῆς προόδου μέχρις ἑκατοντάδος, ἀφ' ἧς πάλιν ἡ ἐπάνοδος ἐπὶ τὴν δεκάδα ἔσται, ἐκ τῆς ἐπισυνθέσεως γενήσεται ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἡ τετρωδουμένη μονάς, ἄρθρον καὶ αὐτὸς ὢν διοριστικὸν ἑκατοντάδων τε καὶ μυριάδων. οὐκέτι δὲ καὶ πλευρὰ ἔσται τετραγωνικὴ τοῦ χίλια ἀριθμοῦ ἡ ἑκατοντάς· οὐδὲ γὰρ τετράγωνός ἐστιν ὁ χίλια, ἀλλὰ κύβος, ἀπὸ πλευρᾶς δεκάδος. ἵνα δ' ἐπιπεδωθῇ προμηκικῶς πλευρὰ αὐτοῦ, ἔσται ἡ ἑκατοντὰς σὺν τῇ καὶ δεκάδι, ὡς δῆλον εἶναι ὅτι δεήσεται ἡ ἑκατοντὰς τῆς δεκάδος εἰς τὸ πλευρικὴν γενέσθαι.

πάλιν εἰ τῇ ἑκατοντάδι ἀρχῇ χρησαίμεθα καὶ ἀντὶ ὕσπληγος, προσέλθοιμεν δὲ ἐπισυντιθέντες τὰς μετ' αὐτὴν ἑκατοντάδας μέχρι χιλιάδος, καὶ ἀπὸ ταύτης ὡς ἀπὸ καμπτῆρος ὁμοίως ἐπὶ τὴν ἑκατοντάδα ἐπανέλθοιμεν ὡς ἐπὶ νύσσαν, ἔσται ἀριθμὸς ὁ τῶν μυρίων ἡ πεντωδουμένη μονάς, πλευρὰν ἔχων ὡς μὲν τετράγωνος τὴν ἑκατοντάδα ὡς δὲ προμήκης τὴν χιλιάδα μετὰ τῆς αὐτῆς δεκάδος. οὕτως ἡ δεκὰς εἰς μὲν τὸ αὐτὴ τὴν πλευρικὴν γενέσθαι κατὰ τὸν διαυλικὸν τρόπον οὐδενὸς τῶν ἄλλων γενέσεων ἄρθρων τοῦ ἀριθμοῦ δεήσεται, ἑκατοντάδος λέγω καὶ χιλιάδος· αὗται δὲ ἵνα αὐταῖς **[90]** τὸ τοιοῦτο συμβῇ πάντως δεήσονται τῆς δεκάδος, ὅθεν αὐτῇ ἐγκώμιον τοῦτο προσενείμαμεν.

Die Zehn selbst aber **[89]** wird die Seite der Quadratzahl 100 bilden, und ihr Quadrat <Potenz> ist die sich auf ihrer Grundlage ergebende Gesamtsumme der kumulativen Addition aller Zahlen, die in ihr sind, zweimal genommen. So nämlich hat man ja auch gesagt, einem Doppellauf <Hin- und Herlauf> gleiche die Methode der Zusammenrechnung der Zahlen, einmal voranschreitend wie von einem Startpunkt an (der ersten Zahl) und einmal auf dem Rückweg wie von einer Wendesäule her (der letzten Zahl).

Wenn wir jedoch die Zehn nicht mehr als Wendepunkt gebrauchen, sondern als Startmaschine und als erste Zahl des Hinwegs bis zur Zahl Hundert, von der aus wiederum der Rückweg zur Zehn zurück erfolgen wird <10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100 + 90 + 80 ... + 10 = 1000>, dann wird aus der Zusammensetzung als erste Zahl die Vierwegeeinheit <die Zahl 1000> entstehen, die ihrerseits das abgrenzende Glied zwischen Hunderter- und Tausenderzahlen bilden wird. Nicht mehr jedoch wird die Zahl hundert auch die Quadratseite der Zahl tausend bilden, denn die Zahl tausend ist keine Quadratzahl, sondern eine Kubikzahl von der Seite zehn. Damit sie <die 1000> jedoch als ebene Figur in Rechteckform dargestellt wird, soll ihre eine Seite die hundert sein und die andere dazu die Zahl zehn, so dass deutlich wird, dass die hundert die Zahl zehn braucht, um zur Seitenzahl zu werden.

Wenn wir aber nun wieder die Zahl hundert als Anfang und anstelle einer Startmaschine ansetzen und voranschreiten, indem wir die Hunderterzahlen nach ihr kumulativ addieren bis hin zur Zahl tausend, und wenn wir auch von dieser als vom Wendepunkt in gleicher Weise zur Zahl hundert zurückkehren wie zur Ziellinie, dann wird die Summe von zehntausend die Fünfwegeeinheit sein, die, als Quadratzahl genommen, die Seite hundert haben wird, als Rechteckzahl aber die Zahl tausend mit der Zehn selbst <als anderer Seite> dazu. So wird die Zehn, um selbst Seitenzahl nach der Methode des Doppellaufes zu werden, kein Zahlenglied aus anderen Erzeugungen brauchen, ich meine die Hundert- und die Tausendzahl; damit bei diesen **[90]** Erzeugungen jedoch etwas Derartiges eintritt, werden sie durchwegs die Zehnerzahl brauchen, und deshalb haben wir ihr auch dieses Loblied gewidmet.

λοιπὸν δὲ εἰπεῖν καὶ ὅσα ἄλλα συμπτώματα δύναται ἐπινοεῖσθαι ὑπὸ τῶν κατὰ τὸ φιλοθέωρον συντεινόντων ἑαυτοὺς ἐπὶ τὴν ἀνεύρεσιν τῶν συμβεβηκότων τοῖς ἀριθμοῖς, οἷον ὅτι πᾶς τετράγωνος ἤτοι αὐτόθεν τρίτον ἔχει, ἢ εἰ μὴ ἔχει πάντως γε τέταρτον, ἢ εἰ μηδὲ τοῦτο μονάδος ἀφαιρεθείσης ἐκ μὲν τρίτον ἔχοντος τέταρτον ἔχοντα ἀποτελέσεις, ἐκ δὲ τέταρτον ἔχοντος τρίτον ἔχοντα, εἰ δὲ μηδ' ἕτερον, ἀμφότερα· εἰ δὲ ἔχοι ἀμφότερα, ἔστιν ὅτε ἡ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀμφοτέρων στερίσκει. καὶ ἅπας ἀριθμὸς τὸν δυάδι διαφέροντα ἐφ' ἑκάτερα ὁποτερονοῦν ὁμογενῆ πολλαπλασιάσας καὶ προσλαβὼν μονάδα τετράγωνον ποιεῖ. περισσοὶ μὲν ἀρτίους ποιοῦσιν, ἄρτιοι δὲ περισσούς.

καὶ ἅπας ἀριθμὸς τὸν ἑαυτοῦ πολλαπλάσιον μηκύνας τοσουτοπλάσιον τοῦ ἐξ αὐτοῦ τετραγώνου ποιήσει, κἂν ἐπιμόριον κἂν ἐπιμερῆ κἂν μικτὸν λαμβάνῃ. ὁμοίως καὶ πᾶς τρίγωνος ὀκτάκι γενόμενος καὶ προσλαβὼν μονάδα τετράγωνον ποιεῖ, καὶ ἐκ δύο τετραγώνων ἐπ' ἀλλήλους γενομένων ὁ γενόμενος τετράγωνος, καὶ ἐκ τῶν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐὰν ὁ τῇ μονάδι ἑξῆς τετράγωνος ᾖ καὶ οἱ λοιποὶ τετράγωνοι ἔσονται, καὶ τριῶν τινων ἀνάλογον ὄντων ἐὰν ὁ πρῶτος τετράγωνος ᾖ καὶ ὁ τρίτος ἔσται τετράγωνος, καὶ μετροῦντος τετράγωνον τετραγώνου καὶ πλευρὰ πλευρὰν μετρήσει,[23] καὶ πᾶς ἐκ δύο πλευρῶν συνεχῶν τετραγώνων μηκυνθεὶς ἀνάλογον αὐτῶν μέσος **[91]** ἔσται, καὶ πολλὰ ἄλλα τοιαῦτα δι' ἑαυτῶν τε προθυμηθέντες εὑρήσομεν καὶ ὑπ' ἄλλων ἐκπεπονημένα ἱστορῆσαι δυνησόμεθα.

[23] Euklid, Elemente VIII, 14

Weitere Eigenschaften figurierter Zahlen

Es bleibt nun übrig darzustellen, welche weiteren Eigenschaften <der Zahlen> noch erforscht werden können von denen, die sich aus Liebe zum Nachsinnen der Erforschung der Eigenschaften der Zahlen widmen. So zum Beispiel folgendes: Jede Quadratzahl hat entweder von sich aus ein Drittel oder, wenn sie es nicht hat, grundsätzlich ein Viertel oder, wenn sie nicht einmal dieses hat, wird man, wenn man eins abzieht, aus einer Zahl, die ein Drittel hat, eine Zahl bilden können, die ein Viertel hat, und aus einer Zahl, die ein Viertel hat, eine Zahl, die ein Drittel hat, und wenn sie keines von beiden hat, alle beide zusammen. Hat sie aber beides zusammen, kann manchmal die Wegnahme der Eins der Zahl beide Eigenschaften nehmen <z.B.: 4 hat $\frac{1}{4}$; 9 hat $\frac{1}{3}$; 9 - 1 = 8, was $\frac{1}{4}$ hat; 16 - 1 = 15, was $\frac{1}{4}$ hat; 36 hat $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$; aber 36 - 1 = 35, was weder $\frac{1}{4}$ noch $\frac{1}{4}$ hat>. Und jede Zahl, die eine um zwei unterschiedene gleichartige Zahl (nach jeder der beiden Seiten hin) multipliziert und noch eine Eins hinzufügt, wird aus ihr eine Quadratzahl machen. Ungerade Zahlen aber erzeugen dabei gerade, gerade jedoch ungerade.

Und jede Zahl, die ihr eigenes Vielfaches multipliziert, wird das umso vielmal Größere des Quadrates aus ihr erzeugen, auch wenn sie ein Überteiliges oder ein Überteilendes oder einen gemischten Bruch bekommt <z.B.: 3 · 2 = 6; 3 · 6 = 18; 18 = 2 · 9; oder: 4 · 3 = 12; 4 · 12 = 48; 48 = 3 · 16>. In gleicher Weise wird auch jede Dreieckzahl, wenn man sie achtmal nimmt und eine Eins hinzuzählt, eine Quadratzahl hervorbringen <3 · 8 + 1 = 25, 6 · 8 + 1 = 49 usf.>. Auch wird aus zwei Quadratzahlen, die miteinander multipliziert werden, wiederum eine Quadratzahl entstehen; und unter proportionalen Zahlen von der Eins an werden, wenn die auf die Eins folgende Zahl eine Quadratzahl ist, auch die übrigen Quadratzahlen sein <1 : 9 = 9 : 81>, und wenn drei Zahlen in gleichem Verhältnis stehen, wird dann, wenn die erste eine Quadratzahl ist, auch die dritte eine Quadratzahl sein <9 : 6 = 6 : 4>, und wenn eine Quadratzahl eine Quadratzahl misst, wird auch die Seitenzahl die Seitenzahl messen, und analog wird jede Zahl, die aus den zwei Seiten zusammenhängender Quadratzahlen multipliziert ist, die Mitte **[91]** von beiden einnehmen <z.B. 16 = 4 mal 4; 25 = 5 mal 5 ; 5 mal 4 = 20; 20 liegt zwischen 16 und 25>. Und wenn wir uns Mühe geben, werden wir noch vieles derartige aus eigener Kraft herausfinden und das, was andere in mühevoller Arbeit erforscht haben, untersuchen können.

τὰ νῦν δὲ μετιτέον ἐπὶ τὸν πλευρικόν τε καὶ διαμετρικὸν λόγον ἱκανωτάτης ἐξετάσεως ἐν γεωμετρίᾳ τετυχηκότα, διότι δοκεῖ κατ' αὐτόν πως ῥυθμίζεσθαι καὶ εἰδοποιεῖσθαι τὰ σχήματα.

ὡς οὖν καὶ ἐπ' αὐτῶν τῶν σχημάτων ἐποιοῦμεν μετάγοντες αὐτῶν τοὺς λόγους καθ' ὁμοιότητα καὶ ἐπὶ τοὺς ἀριθμούς· ῥητὰ γὰρ κἀκεῖνα γίνεται τοῖς ἀριθμοῖς· οὕτως χρὴ καὶ περὶ πλευρᾶς καὶ διαμέτρου διαλεγομένους καὶ ἀκολουθοῦντας τῇ τοῦ ἀριθμοῦ φύσει ἀποσῴζειν ὡς ἐνδέχεται τὴν ὁμοιότητα.

οὐ γὰρ ὥσπερ ἐν πηλίκοις πλευρᾶς λογωθείσης ἡ διάμετρος ἄλογος ἢ ἀνάπαλιν διαμέτρου λογωθείσης πλευρὰ ἄλογος, οὕτω καὶ ἐν ποσοῖς, ἀλλ' ἔσται ῥητὴ πλευρὰ διαμέτρῳ, ἵνα πάντῃ ῥητὸς ᾖ ὁ ἀριθμὸς καὶ τοῦτ' ἐξαίρετον ἔχῃ, ὡς ἂν ἀρχικώτατος ὢν καὶ τοῖς ἄλλοις ἅπασιν αἴτιος γενόμενος ῥητότητος.

κοινὸν μὲν γὰρ ἀριθμοῖς καὶ μεγέθεσιν ὡς ἂν ἀσωμάτοις οὖσι τὸ ἀκίνητα εἶναι, ἴδιον δὲ ἀριθμοῦ τὸ μηδὲ ἀσυμμετρίαν ἔχειν, τῶν μεγεθῶν ἐχόντων. δεῖ δὴ πάλιν ἀπὸ μονάδος τὴν γένεσιν τοῦ πλευρικοῦ καὶ διαμετρικοῦ λόγου μεθοδεῦσαι, ἐπειδὴ πάντων τῶν ἐν ἀριθμοῖς λόγων ἔφαμεν αὐτὴν ἀφηγεῖσθαι. ὀνομάσαι γὰρ δεῖ δύο μονάδας τὴν μὲν πλευρὰν τὴν δὲ διάμετρον, καὶ χρήσασθαι καθολικαῖς τισι προσθέσεσι καὶ ἀεὶ ταῖς αὐταῖς, τῇ μὲν **[92]** πλευρᾷ διάμετρον προστιθέντας τῇ δὲ διαμέτρῳ δύο πλευράς, ἐπειδὴ ὅσον ἡ πλευρὰ <δὶς> δύναται ἐν γραμμικοῖς, ἡ διάμετρος ἅπαξ. γίνεται οὖν ἡ διάμετρος μονάδι μείζων τῆς πλευρᾶς.

ἡ δ' ἐξ ἀρχῆς ἄνευ τῆς προσθήκης τὸ ἀπὸ τῆς μοναδικῆς διαμέτρου δυνάμει τετράγωνον μονάδι ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς μοναδικῆς πλευρᾶς δυνάμει τετραγώνου· ἐν ἰσότητι γὰρ οὖσαι αἱ μονάδες τὴν ἑτέραν τῆς λοιπῆς μονάδι ἐλάττονα ποιοῦσιν ἢ διπλασίαν.

τῆς δὲ προσθήκης γενομένης ὡς εἴρηται, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον· θʹ γὰρ καὶ δʹ. πάλιν ἐὰν προσθῶμεν τῇ μὲν πλευρᾷ διάμετρον τῇ δὲ διαμέτρῳ δύο πλευράς, ἔσται ζʹ καὶ εʹ, καὶ γίνεται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου μονάδι ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· ἔστι γὰρ μθʹ πρὸς κεʹ.

Kommensurabilität und Inkommensurabilität von Zahlen und Größen

Für jetzt aber müssen wir übergehen zum Verhältnis der Seiten und der Diagonale, das am besten in der Geometrie erforscht werden kann, weil es so scheint, dass etwa nach diesem Verhältnis die Figuren gestaltet und geformt sind.

Wie wir es nun auch bei den Figuren selbst gemacht haben, indem wir die geometrischen Verhältnisse entsprechend ihrer Ähnlichkeit auch auf die Zahlen übertrugen (denn auch diese Verhältnisse lassen sich durch die Zahlen ausdrücken), so müssen wir uns auch über Seite und Diagonale unterhalten, uns dabei an die Natur der Zahl halten und nach Möglichkeit die Ähnlichkeit bewahren.

Bei <geometrischen> Größen nämlich ist, wenn man die Seite berechnet, die Diagonale inkommensurabel oder wiederum, wenn man die Diagonale berechnet, die Seite inkommensurabel. Nicht so ist es jedoch auch bei den <arithmetischen> Größen, sondern hier wird die Seite zur Diagonalen rational sein, damit die Zahl in jeder Weise rational ist und diese Eigenschaft als Besonderheit hat, weil sie ja der letzte Ursprung ist und für alle übrigen <Zahlen> Grund der Rationalität.

Gemeinsam nämlich ist den Zahlen und Größen als unkörperlichen Wesenheiten, dass sie unbeweglich sind, doch ist es eine Eigenheit der Zahl, dass sie keinerlei Inkommensurabilität hat, während die Größen solche haben. Man muss nun wieder die Erzeugung des seitlichen und diametrischen <diagonalen> Verhältnisses, von der Eins an ausgehend, erforschen, da wir ja behaupteten, dass die Eins die Anführerin aller Verhältnisse unter den Zahlen sei. Man muss nämlich die Seite, aber auch die Diagonale als zwei Einheiten bezeichnen und bestimmte allgemeine und immer gleiche Hinzufügungen vornehmen, indem wir der **[92]** Seite die Diagonale und der Diagonale zwei Seiten hinzufügen, da ja das, was die Seite zweimal in der gezeichneten Figur bedeutet, die Diagonale einmal bedeutet. Also wird die Diagonale um eine Einheit größer als die Seite.

Die Ausgangsdiagonale aber ohne die Hinzufügung ist das potentielle Quadrat der Diagonale eins um eins kleiner als das Doppelte des potentiellen Quadrates von der Seite eins. Da nämlich die Einheiten im Verhältnis der Gleichheit sind, machen sie die andere Seite des übrigen um eine Eins kleiner als die doppelte <1 mal 1 : 2 mal (1 mal 1) - 1; 1 : 2 - 1>.

Wenn aber die Hinzufügung geschehen ist, wie gesagt, dann wird das <Quadrat> über der Diagonale um eins größer sein als das Doppelte des <Quadrates> über der Seite, 9 nämlich und 4. Wiederum, wenn wir der Seite die Diagonale hinzufügen und der Diagonale zwei Seiten, werden sich 7 und 5 ergeben, und es wird das Quadrat der Diagonale um eins kleiner sein als das Zweifache des <Quadrates> über der Seite; es ist nämlich 49 zu 25.

πάλιν εἰ ἡ αὐτὴ προσθήκη γίγνοιτο, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· ἔστι γὰρ σπθʹ πρὸς ρμδʹ. καὶ δὴ ὁμοίως κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τῆς προσθήκης γιγνομένης ποτὲ μὲν μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον ἔσται τὸ ἀπό τοῦ ἀπό, ποτὲ δὲ μονάδι ἔλαττον, καὶ οὕτως ῥηταὶ γίνονται πρὸς ἀλλήλας πλευραί τε καὶ διάμετροι.

ἀλλ' οὖν ἐπειδὴ ἐναλλὰξ ποτὲ μὲν δυνάμει μείζους εἰσὶν ἢ διάμετροι διπλάσιαι πλευρῶν, ποτὲ δὲ μονάδι ἐλάττους ἢ διπλάσιαι, ἔσονται κατ' ἐπίνοιαν πᾶσαι ὁμοῦ αἱ διάμετροι πασῶν ὁμοῦ τῶν πλευρῶν δυνάμει διπλάσιαι· ἀπίσωσις γὰρ γίνεται τοῦ μείζονος τῷ ἐλάττονι ἀναμιγέντος, διότι **[93]** στάσις τοῦ ὑπερέχοντος πρὸς ὑπερεχόμενον ἡ ἰσότης ἐστί, διόπερ κἀνταῦθα τὸ μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον προστεθὲν τῷ μονάδι ἐλάττονι ἢ διπλασίῳ ἀπισώσει τὸ πᾶν, ὥστε ἀεὶ τὴν διάμετρον δυνάμει διπλασίαν εἶναι τῆς πλευρᾶς, καθάπερ καὶ ἐπὶ τῶν γραμμικῶν δείκνυται. καὶ τοσαῦτα μὲν ἡμῖν περὶ τῶν τοῖς ἐπιπέδοις ἀριθμοῖς συμβεβηκότων εἰρήσθω.

Στερεὸς δέ ἐστιν ἀριθμὸς ὁ τρίτον διάστημα παρὰ τὰ ἐν ἐπιπέδοις δύο προσειληφώς, δηλονότι τετάρτου ὅρου προσγενομένου· ἐν γὰρ τέσσαρσιν ὅροις τὸ τριχῇ διαστατόν, ἵνα καὶ λαβόντος καὶ ληφθέντος καὶ τρίτου καθ' ὃν λαμβάνεται τέταρτος αὐτὸς ᾖ.

Und wenn man wieder dieselbe Hinzufügung vornimmt, dann wird das Quadrat der Diagonale um eins größer sein als das Doppelte des Quadrates der Seite; es ist nämlich 289 zu 144. Und so wird in gleicher Weise, wenn im gleichen Verhältnis die Erweiterung vorgenommen wird, das Quadrat über der Diagonale im Verhältnis zum Quadrat über der Seite einmal um eins größer als das Doppelte davon, einmal aber um eins kleiner, und so werden Diagonalen und Seiten zu einander rational.

Da aber nun abwechselnd einmal in Potenz das Doppelte der Seiten einmal um eins größer ist als die Diagonalen, ein andermal aber um eins kleiner als das Doppelte der Seiten, werden, wie anzunehmen ist, alle Diagonalen zusammen in Potenz das Doppelte aller Seiten zusammen sein. Denn es ergibt sich ein Ausgleich, da ja das Größere mit dem Kleineren vermischt wird; **[93]** besteht doch das Ergebnis des Auswiegens zwischen dem Überragenden und dem Überragten in der Gleichheit, weshalb auch hier, wenn man das um eins Größere als das Doppelte zu dem um eins Kleineren als das Doppelte hinzugibt, das Ganze sich ausgleichen wird, so dass stets die Diagonale in Potenz das Doppelte der Seite beträgt, wie es sich auch im geometrischen Verfahren herausstellt. – So viel sei nun von uns über die Eigenschaften der Flächenzahlen gesagt.

Körperzahlen

Körperlich ist aber eine Zahl, die eine dritte Dimension neben den beiden Dimensionen bei den Flächenzahlen hinzu bekommen hat, wobei natürlich ein vierter Term dazukam; muss sich doch das Dreidimensionale in vier Termen ausdehnen, damit neben einer nehmenden Zahl, einer genommenen Zahl und einer dritten, nach der genommen wird, auch noch sie selbst als vierte da ist.

τῶν δὴ στερεῶν ἀριθμῶν εἰσιν οἱ μὲν ἰσογώνιοί τε καὶ ἰσοεπίπεδοι καὶ ἰσοδιάστατοι, καθ' ὁμοιότητα καὶ αὐτοὶ λαμβανόμενοι τῶν ἐν γραμμικοῖς· καλοῦνται δ' οὗτοι κύβοι καὶ τετράεδροι πυραμίδες, ὧν πάντῃ μεταλαμβάνεται ἡ βάσις· οἱ δὲ παραλληλεπίπεδοι καὶ ἰσογώνιοι, ἀνισοδιάστατοι δέ, ὧν εἴδη πλινθίδες τε καὶ δοκίδες, οἱ δὲ ἀνισεπίπεδοι καὶ ἀνισογώνιοι καὶ ἀνισοδιάστατοι, καλούμενοι σφηκίσκοι ἢ ὥς τινες βωμίσκοι ἢ σφηνίσκοι, ἑκάστου ὀνόματος καθ' ὁμοιότητα τεθέντος, οἱ δὲ μικτοὶ πάσας μὲν γωνίας παρὰ μίαν ἴσας ἔχοντες πάντα δὲ ἐπίπεδα πάλιν παρ' ἓν ἴσα πυραμίδες, αἱ ἀπὸ <τῆς> τετραγώνῳ βάσει χρωμένης ἀρχόμεναι μέχρις ἀπείρου, ὧν οὐκέτι μετάληψις ἔσται κατὰ τὴν βάσιν, ὡς ἐπὶ τῆς τριγώνῳ βάσει χρωμένης συνέβαινεν.

ἀναλογεῖ δὲ ἐν ἐπιπέδοις τὸ μὲν ἐν τετραπλεύροις κυρίως **[94]** λεγόμενον τετράγωνον κύβῳ, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον πλινθίδι ἢ δοκίδι, ἥν τινες στηλίδα καλοῦσι, τὸ δὲ τραπέζιον σφηνίσκῳ.

δεῖγμα δὲ τοῦ μὲν πάντῃ ἰσάκις ἴσως διισταμένου κύβου ὅ τε η' καὶ ὁ κζ' καὶ ὁ ξδ' καὶ ρκε' καὶ σις', ἔκ τε τοῦ δὶς δύο δὶς καὶ ἐκ τοῦ τρὶς τρία τρὶς καὶ τετράκι τέσσαρα τετράκις καὶ πεντάκι πέντε πεντάκις καὶ ἑξάκις ἓξ ἑξάκις γινόμενοι.

ὧν πάντων κύβων καλουμένων ὅσοι ἂν ἐπὶ τὸ αὐτὸ πάσῃ προβάσει καταλήγωσιν ἔτι μᾶλλον καὶ σφαιρικοὶ λεγέσθωσαν, ἑνὶ πλείονι διαστήματι αὐξηθέντες ἀπὸ κυκλικῶν καὶ αὐτῶν ὁμοκαταλήκτων ὄντων, ὡς ὁ ρκε' ἀπὸ πλευρᾶς πεντάδος ὢν καὶ ὁ σις' ἀπὸ πλευρᾶς ἑξάδος. κἂν ἐπὶ πλέον δὲ αὐξάνωνται οὗτοι, οὐδὲν ἧττον ἑκάτεροι ἐπὶ τὴν ἑαυτῶν πλευρὰν καταλήξουσιν.

ἡ δὲ μονὰς ὥσπερ τὰ ἐν ἐπιπέδοις πάντα περιεῖχε χωρὶς τοῦ ἑτερομηκικοῦ λόγου, οὕτως καὶ τὰ ἐν στερεοῖς· πυραμιδική τε γὰρ ἔσται ἐπὶ κορυφῆς θεωρουμένη παντὸς εἴδους πυραμίδος, δυνάμει στερεοῦ σημείου λόγον ἔχουσα καθ' ἕκαστον παντὸς γὰρ στερεοῦ ἀριθμοῦ αἱ γωνίαι μονάδες σημειώδεις ἔσονται τῶν <ἐν> ἐπιπέδοις δυνάμει μείζονες, διότι στερεαί·

Von den Körperzahlen sind nun die einen gleichwinklig, mit gleichen Flächen und mit gleichen Abständen, und diese werden auch in gleicher Weise wie bei dem geometrischen Verfahren genommen. Diese werden aber Würfel und vierflächige Pyramiden genannt, deren Basislänge an allen Seiten übernommen wird. Andere heißen Parallelepipede und gleichwinklig <Körper mit parallelen Seitenflächen und gleichwinklig>, haben jedoch ungleiche Abstände; deren Formen sind Ziegel und Stäbchen. Wieder andere haben ungleiche Flächen und ungleiche Winkel und ungleiche Abstände, und diese nennt man Spitzpfähle oder, wie manche sagen, Altärchen oder Keilchen, wobei jeder Name nach der Ähnlichkeit gegeben wurde. Die gemischten Formen aber haben alle Winkel gleich außer einem und wiederum alle Flächen gleich außer einer, und sie heißen Pyramiden, die mit der Pyramide anfangen, die eine quadratische Basis hat, und deren Basisecken bis ins Unendliche erweitert werden <z.B. Pentagon, Hexagon usw.>, bei denen es keine Teilnahme an der Basislänge mehr geben wird, wie es bei der Pyramide geschah, die ein Dreieck als Basis hat.

Von den Flächenfiguren aber entspricht bei den vierseitigen Figuren, passend **[94]** gesprochen, das Quadrat dem Würfel, das Parallelogramm dem Ziegelchen oder dem Stäbchen, die manche auch Säulchen nennen, und das Trapez entspricht dem Keilchen.

Der Beweis aber für den Würfel, der überall gleichmal gleichen Abstand hat, sind die 8, die 27 und die 64 und die 125 und 216, die entstanden sind aus zwei mal zwei mal zwei und aus drei mal drei mal drei und aus vier mal vier mal vier und aus fünf mal fünf mal fünf und aus sechs mal sechs mal sechs.

Während man alle Zahlen Kubikzahlen nennt, die bei jedem Voranschreiten auf das Gleiche aufhören <Die letzte Zahl ist gleich der ersten, z.B. 4 ist die letzte Zahl von 64, das aus 4 mal 4 mal 4 entstanden ist>, sollten sie noch besser auch Kugelzahlen genannt werden, da sie nur um eine Dimension mehr von den Kreiszahlen erweitert sind, die ebenfalls in gleicher Weise enden, wie zum Beispiel die 125, die von einer Seite fünf entstand, und die 216, die von einer Seite 6 entstand <5 mal 5 mal 5 = 125>. Und wenn man diese Zahlen nach oben ansteigen lässt, werden dennoch beide jeweils auf ihre Seitenzahl ausgehen.

Wie aber die Eins bei den Flächenzahlen alles umfasste mit Ausnahme der Rechteckzahl, so umfasst sie auch das bei den Körperzahlen. Sie wird nämlich eine Pyramidenfigur haben, wenn man sie von oben betrachtet, und zwar in Gestalt jeder Pyramide, weil die Eins potentiell die Bedeutung eines räumlichen Punktes in jeder Form hat; denn bei jeder Körperzahl werden die Winkel punktförmige Einer sein, potentiell größer als die Winkel bei den Flächenzahlen, weil sie ja räumlich sind.

ἁπλοῦν μὲν γὰρ τὸ σημεῖόν ἐστι πέρας ὂν τοῦ ἐφ' ἓν διαστατοῦ μεγέθους, διπλοῦν δὲ δυνάμει ἐν ἐπιπέδοις διὰ τὴν σύννευσιν τῶν δύο γραμμῶν ἐφ' ἓν σημεῖον, ἐν δὲ στερεοῖς δυνάμει ἀόριστον ἀρχόμενον ἀπὸ τριπλοῦ, διότι πρώτη σύννευσις τριῶν πλευρῶν στερεὰν γωνίαν τὴν πυραμιδικὴν ἀποτελεῖ. καὶ μὴν σφαιρικὴ ἔσται ἡ **[95]** μονάς, ὥσπερ ἦν καὶ κυκλική, τρὶς κατὰ τὸ ἑαυτῆς μέγεθος διαστᾶσα.

τῶν δὲ πάντῃ ἀνισοδιαστάτων ἀριθμῶν ὑπόδειγμα κοινὸν ἔστω ὁ ξʹ· καὶ γὰρ ἐκ τοῦ τρὶς τέσσαρα πεντάκις ἐστὶ καὶ ἀνάπαλιν ἐκ τοῦ πεντάκι τέσσαρα τρὶς καὶ ἐκ τοῦ τετράκι πέντε τρὶς καὶ ἐκ τοῦ τετράκι τρία πεντάκις.

παραλληλεπιπέδων δέ, πλινθίδων μὲν ἰσάκις ἴσων ἐλαττονάκις οὐσῶν ὁ ιηʹ ἐκ τοῦ τρὶς τρία δὶς ὢν καὶ ὁ μηʹ ἐκ τοῦ τετράκι τέσσαρες τρίς, δοκίδων δέ, ἅς τινες στηλίδας, ἰσάκις ἴσας μειζονάκις οὔσας ὁ λςʹ ἐκ τοῦ τρὶς τρία τετράκις ὢν καὶ ὁ μεʹ ἐκ τοῦ τρὶς τρία πεντάκι·

ἔνεστι γὰρ καὶ ἐπὶ τούτων καὶ ἐπὶ τῶν πλινθιδίων μὴ μόνον παρακειμένας, τουτέστι παρὰ μονάδας, μειώσεις τε καὶ αὐξήσεις ποιεῖσθαι, ἀλλὰ καὶ διεστώσας, ἵνα μᾶλλον ἡ ὁμοιότης σχηματίσεως ἐμφαίνωνται.

πυραμίδων δὲ λόγος ῥᾴων γένοιτο καὶ εὐεφόδευτος εἰ τὴν τῶν πολυγώνων ἔκθεσιν ἀπὸ τριγώνων κατὰ παραλλήλους στίχους ὡς μικρῷ πρόσθεν διαγράψαιμεν, εἶτ' ἐφαρμόζοιμεν σωρηδὸν τοὺς ὁμογενεῖς ἀλλήλοις εὐτάκτως μέχρις ὁποσουοῦν, ἵνα κορυφὴ μὲν πάντως μονὰς ᾖ καθ' ἑκάστην ἐπισωρείαν, ὁμοιοσχήμων δὲ δυνάμει πάσῃ βάσις γίνηται.

διὰ μὲν οὖν τῶν [τριῶν] γʹ ςʹ ιʹ ιεʹ καʹ καὶ ἐφεξῆς τριγώνων ἔσονται πυραμίδες αἱ τρίγωνον βάσιν ἔχουσαι αὗται· δʹ ιʹ κʹ λεʹ νςʹ, διὰ δὲ τῶν τετραγώνων τῶν δʹ θʹ ιςʹ κεʹ λςʹ αἱ τετραγώνῳ βάσει χρώμεναι εʹ ιδʹ λʹ νεʹ ϙαʹ, διὰ δὲ τῶν πενταγώνων τῶν εʹ ιβʹ κβʹ λεʹ ναʹ αἱ βάσει πενταγώνῳ χρώμεναι αἱ ςʹ ιηʹ μʹ οεʹ ρκςʹ. τὸ δ' αὐτὸ καὶ **[96]** ἐπὶ τῶν ἑξῆς πολυγώνων ποιήσομεν· ὡς γὰρ γνώμονας εἴχομεν τῶν πολυγώνων τοὺς ἐφεξῆς ἀπὸ μονάδος ἀριθμούς, οὕτως καὶ πυραμίδων <τοὺς> ἐφεξῆς πολυγώνους καθ' ἕκαστον.

Einfach genommen ist nämlich der Punkt die Begrenzung der Größe mit der Ausdehnung eins, potentiell doppelt aber ist er bei den Flächen, weil ja das Zusammentreffen der beiden Linien an einem Ort ein Punkt ist; bei den Körperzahlen aber ist der Punkt potentiell unbegrenzt, angefangen mit dem Dreifachen, weil das erste Zusammentreffen dreier Seiten den Pyramidenwinkel räumlich macht. Und so wird die Eins auch sphärisch <räumlich> sein, **[95]** wie sie auch kreisförmig war, weil sie sich ja hier dreimal gemäß ihrer eigenen Größe ausdehnt.

Für die Zahlen, bei denen alle Abstände ungleich sind, diene als allgemeines Beispiel die 60. Besteht sie doch aus vier mal drei mal fünf und wieder aus vier mal fünf mal drei und aus fünf mal vier mal drei und aus vier mal drei mal fünf.

Für die Körper mit parallelen Seitenflächen <Parallelepipede>, die Ziegel, die aus gleichmal gleichen und einer kleineren Seite bestehen, diene als Beispiel die Zahl 18, die aus drei mal drei mal zwei entsteht, und die Zahl 48, die aus vier mal vier mal drei entsteht. Als Beispiel für die Stäbchen, die manche Säulchen nennen und die aus gleichmal gleichen und einer größeren Seite bestehen, diene die Zahl 36, die entsteht aus drei mal drei mal vier, und die Zahl 45, die aus drei mal drei mal fünf entsteht.

Man kann nämlich bei diesen Zahlen und bei den Ziegelzahlen nicht nur nebeneinander liegende Verkleinerungen und Vergrößerungen vornehmen (das heißt solche um jeweils eins), sondern auch solche mit <größeren> Abständen <z.B. im letzten Beleg, wo 3 und 5 verwendet sind>, damit die Ähnlichkeit der Gestaltung deutlicher hervortritt.

Das Verständnis der Pyramiden aber könnte leichter und methodisch passend erzielt werden, wenn wir die Reihe der Vielecke von den Dreiecken an in parallelen Zeilen (wie eben zuvor) hinschreiben und dann die einander verwandten gruppenweise in guter Ordnung bis zu einer beliebigen Anzahl zusammenordnen, damit die Eins grundsätzlich bei jeder Gruppe die Spitze bildet und, weil sie grundsätzlich potentiell jeder Pyramide gleichförmig ist, die Grundlage darstellt.

Durch die Zahlen 3, 6, 10, 15, 21 und die folgenden Dreieckszahlen werden nun folgende Pyramiden mit dreieckiger Basis entstehen: 4, 10, 20, 35, 56. Durch die Quadrate 4, 9, 16, 25, 36 aber werden die Pyramiden mit quadratischer Basis entstehen, und zwar: 5, 14, 30, 55, 91; mit Hilfe der Fünfeckzahlen 5, 12, 22, 35, 51 werden folgende Pyramiden mit fünfeckiger Basis entstehen: 6, 18, 40, 75, 126. Dasselbe werden wir auch **[96]** bei den in Reihe folgenden Vielecken machen. Wie wir nämlich als Gnomone der Vielecke die Zahlen von der Eins an in Reihe hatten, so auch bei den Pyramiden der Reihe nach die einzelnen Vielecke.

ἀνάλογος δ' ἔσται καὶ ἡ ποσότης τῶν ἐπιπέδων πρὸς τὰς πλευρὰς τὰς τῶν γνωμόνων, καὶ ὡς ἐκείνων περισσοταγεῖς μὲν δύο παρὰ δύο ἦσαν ἄρτιοι καὶ περισσοί, ἀρτιοταγεῖς δὲ εἷς παρ' ἕνα, οὕτως κἀπὶ τούτων περισσοταγεῖς μία παρὰ τρεῖς ἀρτίας περισσὴ καὶ εἰς πεντάδα γε λήγουσα πλὴν τῇ δυνάμει· καὶ γὰρ ἐν πέμπταις ἀπ' ἀλλήλων εἰσὶ χώραις· ἀρτιοταγεῖς δὲ δύο παρὰ δύο, συμπιπτουσῶν ἀναγκαίως ταῖς ἐν περισσοταγέσι περισσαῖς τῶν καὶ ἐντεῦθεν ὁμοιοκαταλήκτων.

σύστημα δέ ἐστιν ἑκάστη τῆς ὑπὲρ αὐτὴν ἑτεροειδοῦς καὶ τῆς τῶν εἰς ἐπίπεδον ἕνα βαθμὸν ὑποβεβηκυίας, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν πολυγώνων συνέβαινεν· οἷον <ἡ> ε' τῆς δ' καὶ α', ἡ ς' τῆς ε' καὶ α', ἡ ζ' τῆς ς' καὶ α', καὶ πάλιν ἡ ιδ' τῆς ι' καὶ δ', ἡ δὲ ιη' τῆς ιδ' καὶ δ', ἡ δὲ κβ' τῆς ιη' καὶ δ', καὶ ἐφεξῆς ἀκολούθως κατὰ τὸ βάθος καὶ τὸ πλάτος ἑκάστης τῶν πολυγώνων διαγραφῆς ἐφαρμόζοντες ἀνάλογα εὑρήσομεν, ὅτι ἑκάστη πυραμὶς σύστημά ἐστι τῆς ὑπὲρ αὐτὴν καὶ τῆς ὑπ' ἐκείνην· πρῶτον γὰρ οὐδὲν εἶτα παράπαξ εἰς ἐπίπεδον εἶτα παρὰ δὶς εἶτα παρὰ τρὶς καὶ ἐφεξῆς.

καὶ τὰ ἄλλα κατὰ ταὐτὰ ἀναλόγως συμπτώματα καὶ περὶ ταύτας εὑρήσομεν. καὶ ἐν μὲν πλάτει διοίσουσιν ἀλλήλων ἰδίαις βάσεσιν, ἐν δὲ βάθει μετὰ τὸν ἰσότητι στίχον εὐθυγραμμικῶς ἐκκείμενον τετρὰς ἔσται ἡ διαφορὰ στοιχεῖον οὖσα πυραμίδων ἐνεργείᾳ, εἶτα δεκὰς ἡ δευτέρα πυραμίς, εἶτα εἰκοσὰς **[97]** ἡ τρίτη πυραμὶς καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

ἐὰν δέ τις πυραμὶς μὴ ἐπὶ μονάδα κορυφῶται, ἀλλ' ἐπὶ τὸν παρ' αὐτῇ γνώμονα, κόλουρος καλεῖται· ἐὰν δὲ μηδὲ ἐπ' ἐκεῖνον, ἀλλ' ἐπὶ τὸν ἑξῆς, δικόλουρος, καὶ ὁμοίως τρικόλουρος καὶ τετρακόλουρος καὶ ἀεὶ ἀκολούθως ὀνομασθήσεται κατὰ τὴν ποσότητα τῶν ἀφαιρουμένων γνωμόνων.

Analog wird sich auch die Größe der Flächen zu den Seiten der Gnomone verhalten, und wie bei den Vielecken in die Reihe der ungeraden Zahlen geordnet immer zwei um zwei Zahlen gerade und ungerade waren, nach geraden Zahlen geordnet aber jede zweite Zahl, so ist auch bei den Pyramiden, wenn man sie nach ungeraden Zahlen ordnet, eine ungerade Zahl neben drei geraden, wobei die ungerade Zahl auf fünf ausgeht mit Ausnahme der Potenz; denn sie stehen auch an fünfter Stelle voneinander. Fängt man dagegen bei der Reihe mit gerader Anfangszahl an, sind es zwei <gerade> wechselnd mit zwei <ungeraden>, wobei notwendigerweise mit den ungeraden Zahlen in der ungeraden Reihe die auch hier auf die gleiche Zahl endenden Zahlen zusammenfallen.

Jede Pyramide aber ist eine Zusammensetzung aus der über ihr stehenden andersförmigen Pyramide und aus der Pyramide, die bezüglich der Grundfläche eine Stufe unter ihr steht, wie es ja auch bei den Vielecken geschah; so ist zum Beispiel die Fünf aus der Vier und der Eins zusammengesetzt 4 + 1 = 5, die 6 aus 5 und 1, die 7 aus 6 und 1, und wiederum <bei den Pyramiden> die 14 aus 10 und 4, die 18 aus 14 und 4 und die 22 aus 18 und 4. Und wenn wir so immer weiter in Folge entsprechend der Tiefe auch die Breite bei jeder Einteilung der Vielecke analog anpassen, werden wir finden, dass jede Pyramide eine Zusammensetzung darstellt aus der <Vieleck-> Zahl über und der Zahl unter ihr. Zuerst nämlich ist nichts, dann einmal ein Vieleck, dann zwei, dann drei und so weiter in Reihe.

Und wir werden auch die übrigen dementsprechenden analogen Verhältnisse auch bei denselben <Pyramiden> finden. Und in der Breite werden sie sich voneinander durch ihre eigenen Basen unterscheiden, in der Tiefe aber wird nach der Zeile, die durch die Gleichheit geradlinig liegt, die Vier die Differenz darstellen, die aktuell die Grundlage der Pyramiden darstellt; dann wird die zweite Pyramidenzahl die Zehn sein, dann wird **[97]** die Zwanzigzahl die dritte Pyramide sein und so weiter in Folge.

Wenn aber eine Pyramide ihren Gipfel nicht in der Eins hat, sondern beim Gnomon neben dieser <1>, dann wird sie abgestumpft <stumpf> genannt. Endet sie aber nicht einmal bei diesem Gnomon, sondern erst beim nächsten, heißt sie doppelt abgestumpft und in gleicher Weise dreifach abgestumpft und vierfach abgestumpft, und immer weiter in Folge wird eine solche Pyramide entsprechend der Menge der weggenommenen Gnomone benannt werden.

ἰδιώματα δὲ καὶ κύβων πολλὰ εὑρήσομεν ὥσπερ καὶ τῶν τετραγώνων· καὶ γὰρ ἑκάστου ἀριθμοῦ τῶν ἀπὸ μονάδος ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος καὶ τὸν ἐξ αὐτοῦ γίνονται εὔτακτοι κύβοι. καὶ εἰ τάξει οἱ ἀπὸ τετράδος τετράγωνοι τάξει τοὺς ἀπὸ δυάδος ἐφεξῆς ἀριθμοὺς ἑκάστους ἕκαστον μηκύνῃ ἢ ὑπὸ ἑκάστου μηκύνοιτο, ὁμοίως γενήσονται εὔτακτοι κύβοι.

ἔτι οἱ περισσοὶ ἐπειδὴ ἔτι ὁμοποιοί εἰσι καὶ τῆς αὐτοῦ φύσεως, ὡς ἐδείχθη, εἰ συντιθοῖντο κατ' ἐκλογὰς ἀεὶ προσθέσει ἑνός, φύσονται κύβοι·

οἷον α′ πρῶτον ὁ δυνάμει κύβος ἀσύνθετος, εἶτα δύο περισσοὶ γ′ ε′ ὁ η′ κύβος δεύτερος, εἶτα τρεῖς περισσοὶ ζ′ θ′ ια′ <ὁ κζ′> τρίτος κύβος, εἶτα τέσσαρες ιγ′ ιε′ ιζ′ ιθ′ ὁ ξδ′ τέταρτος κύβος, καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ὁμοίως.

πάλιν ἐν τῇ τῶν ἀναλόγων ἐκθέσει οἱ μὲν τρίτοι τετράγωνοί εἰσιν, οἱ δὲ τέταρτοι κύβοι, οἱ δὲ ζ^οι κύβοι ἅμα καὶ τετράγωνοι. πᾶς δὲ κύβος τῇ ἑαυτοῦ πλευρᾷ αὐξηθεὶς τετράγωνον ποιεῖ, ὃς ἔσται τοσουτοπλάσιος τοῦ κύβου ὁσαπλάσιος ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ τῆς κυβικῆς πλευρᾶς τετράγωνος αὐτῆς τῆς πλευρᾶς, ὁ δὲ τετράγωνος **[98]** πλευρὰ καὶ αὐτὸς ἔσται τετραγωνικὴ τοῦ γενομένου ἔκ τε τοῦ κύβου καὶ τῆς αὐτοῦ πλευρᾶς.

πάλιν ὡς ἐκ δύο τετραγώνων μηκυνάντων ἀλλήλους τετράγωνος ἐγένετο, οὕτως ἐκ δύο κύβων κύβος, ἐκ δὲ κύβου ἑαυτὸν λαβόντος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος. καὶ ἐν τοῖς ἀνάλογον ἐὰν ὁ μὲν μετὰ μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ κύβοι ἔσονται·

καὶ τεσσάρων ἀνάλογον ὄντων, ἐὰν ὁ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος ἔσται κύβος, ἢ καὶ μετροῦντος κύβου κύβον, καὶ πλευρὰ πλευρὰν μετρήσει.[24] καὶ σχεδὸν τὰ συμβεβηκότα πάντα τετραγώνοις ἀναλόγως ἐνορασθήσεται καὶ τοῖς κύβοις. ἐπιτρέψαντες οὖν τοῖς δι' αὐτῶν φιλοκαλήσουσι τὴν τῶν τοιούτων συμπτωμάτων ἀνεύρεσιν, ἐπὶ τὸν περὶ ἀναλογιῶν μεταβησόμεθα τόπον.

---

[24] Euklid, Elemente VIII, 15

Wir werden aber auch bei den Würfeln viele Eigenheiten finden wie auch bei den Quadraten. Denn auch wenn jede Zahl von der Eins an sich mit sich selbst multipliziert und dann wieder das Produkt davon multipliziert, dann entstehen regelmäßige Würfel <2 mal 2 mal 2 = 8; 3 mal 3 mal 3 = 27>. Und wenn in Ordnung alle Quadratzahlen von der Vier an alle Zahlen von der Zwei an in Reihe mit sich multipliziert multiplizieren oder von jeder davon multipliziert werden, dann werden in gleicher Weise wohlgeordnete Würfel entstehen <4 mal 2 = 8; 9 mal 3 = 27 usf.>.

Da schließlich die Ungeraden auch noch dasselbe bewirken und dieselbe Natur haben, wie gezeigt wurde, werden ebenfalls Würfel entstehen, wenn man sie in Auswahl zusammenstellt, wobei immer eine Zahl mehr hinzugesetzt wird.

Zum Beispiel ist 1 zuerst ein potentieller nicht zusammengesetzter Würfel; dann kommen die beiden ungeraden Zahlen 3, 5, und 8 ist die zweite Kubikzahl <3 + 5 = 8>; dann kommen wieder drei ungerade, 7, 9, 11, <und 27> ist dann die dritte Kubikzahl <denn 7 + 9 + 11 = 27>; dann folgen die vier ungeraden Zahlen 13, 15, 17, 19, und die vierte Kubikzahl ist dann 64 <denn 13 + 15 + 17 + 19 = 64>; und so geht es mit den folgenden Zahlen in gleicher Weise weiter.

Wiederum sind in der analogen Reihe jeweils die dritten Zahlen <= der dritten Reihe> Quadratzahlen, die vierten aber Kubikzahlen, und immer die siebten Zahlen zugleich Kubikzahlen und Quadratzahlen. Jeder Würfel aber, der mit seiner Seite multipliziert wird, ergibt eine Quadratzahl, die das ebenso Vielfache des Würfels sein wird, wie vielfach auch das Quadrat der Würfelseite von der Seite selbst sein wird; die Quadratzahl aber **[98]** wird auch selbst die Quadratseite des Produkts aus dem Würfel und seiner Seite sein.

Und wie wiederum aus zwei Quadraten, die einander multiplizierten, ein Quadrat entstand, so entsteht aus zwei Kubikzahlen <die einander multiplizierten> eine Kubikzahl, aus der Kubikzahl aber, die sich selbst malnahm, zugleich eine Kubik- und Quadratzahl.

So auch in den analogen Fällen: Wenn die Zahl neben der Eins eine Kubikzahl ist, dann werden auch alle übrigen Zahlen Kubikzahlen sein. Und wenn es analog vier sind, wird, wenn die erste Zahl eine Kubikzahl ist, auch die vierte eine Kubikzahl sein, oder es wird auch, wenn eine Kubikzahl eine Kubikzahl misst, dann auch deren Seite die Seite <der anderen Zahl> messen. Und fast alles, was sich von den Eigenschaften der Quadratzahlen sagen lässt, kann auch in analoger Weise an den Kubikzahlen gesehen werden. - Indem wir nun denen, die aus eigener Kraft nach dem Schönen streben, die Auffindung solcher Übereinstimmungen anheimgeben, wollen wir zum Thema der Proportionen übergehen.

Ἡ τοίνυν ἀναλογία λόγων ἐστὶ πλειόνων ὁμοιότης καὶ ταυτότης. τί δέ ποτ' ἐστὶ λόγος ὁ κατ' ἀναλογίαν, ἐπεὶ πολλαχῶς ὁ λόγος, ἐν τοῖς πρόσθεν διεσαφήσαμεν ὅτι δυεῖν ὅρων ὁμογενῶν ἡ πρὸς ἀλλήλους ἐστὶ σχέσις.[25]

ὁμογενῶν δὲ πρόσκειται, διότι τὰ ὑπὸ ταὐτὸ γένος συγκρίνειν προσῆκεν, οἷον μνᾶν πρὸς τάλαντον, ὧν κοινὸν γένος τὸ βάρος, καὶ γραμμὴν πρὸς ἐπιφάνειαν ἢ στερεόν· κοινὸν γὰρ αὐτῶν τὸ μέγεθος.

ἔστι δέ τινα καὶ κατὰ δύναμιν καὶ κατὰ ὄγκον καὶ ἄλλα τινὰ γένη συγκρινόμενα. τὰ δὲ ἀνομογενῆ πῶς ἔχει πρὸς ἄλληλα οὐ δυνατὸν εἰδέναι, οἷον πῆχυς πρὸς κοτύλην, πρὸς χοίνικα τὸ λευκόν. ἓν δὲ γένος ἐστὶ καὶ τὸ ποσὸν καὶ ποσοῦ ὁ ἀριθμός, ὥστε γενήσεται καὶ τῶν ἐν ἀριθμῷ λόγων ἡ σύγκρισις, ἔσται αὐτῶν λόγος τις **[99]** καὶ σχέσις ποιά. κἂν μὲν ἐν ἰσότητι ὦσιν οἱ ὅροι, ἴσου πρὸς ἴσον ἐστὶ λόγος· ἀδιάφορος γὰρ ἡ ἰσότης· ἐν δὲ ἀνισότητι κατὰ διαφοράν.

καὶ διάστημα μὲν οὐ ταὐτὸ ἔσται καὶ ὁ λόγος διττὸς καὶ ὅτι καὶ τὸ ἄνισον δύο καὶ οὐχ ἓν καὶ διάστημα μὲν ταὐτὸν ἔσται, λόγος δὲ ἕτερος· τοῦ γὰρ δύο πρὸς ἓν καὶ τοῦ ἑνὸς πρὸς δύο διάστημα μὲν ταὐτόν, λόγος δὲ διπλάσιός τε καὶ ἥμισυς, ὥστε ἕτερον λόγον εἶναι διαστήματος· καὶ γὰρ ἐπὶ πλείοσιν ὅροις, λόγου πολλάκις τοῦ αὐτοῦ ὄντος, διάστημα ἕτερόν ἐστιν, ὡς ἐπὶ τῶν δʹ ςʹ θʹ.

ὅτι δὲ ὁ τῆς ἀνισότητος λόγος ἐν δέκα γένεσίν ἐστι, καὶ πέντε μὲν προλόγοις κατὰ τὸ μεῖζον, ὑπολόγοις δὲ τοῖς ἴσοις κατὰ τὸ ἔλαττον, καὶ ὅτι ἀπὸ ἰσότητος πάντες τὴν γένεσιν ἔχουσιν, ἐμάθομεν ἔμπροσθεν ἐν τῷ περὶ τῶν σχέσεων τόπῳ. ἔστι δέ τις καὶ ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν λόγος αὐτῷ λεγόμενος, διὰ τὸ μηδενὶ ὑποπίπτειν τῶν δέκα γενῶν, ὡς ἐπιδειχθήσεται ἐν τοῖς ἁρμονικοῖς, ὁ τοῦ λείμματος λόγος ἐν ὅροις ἐν τοῖς σνςʹ πρὸς σμγʹ.

[25] Euklid, Elemente V, Def. 3

4. Proportionen

Die Proportion nun ist die Gleichheit und Identität mehrerer Verhältnisse. Was aber ein Verhältnis gemäß einer Proportion ist (da das Verhältnis ja vielfach ist), haben wir bereits oben dargelegt, nämlich dass es das Verhältnis zweier gleichartiger Terme zueinander ist.

"Gleichartig" aber ist hinzugesetzt, weil man das miteinander vergleichen muss, was unter dieselbe Gattung fällt, zum Beispiel eine Mine mit einem Talent, die als gemeinsame Gattung die Schwere haben, und eine Linie mit einer Fläche oder einem Raumkörper. Denn diesen ist die Größe gemeinsam.

Man kann aber manche Dinge auch nach ihrer Kraft oder nach ihrer Masse und einigen anderen Gattungen vergleichen. Wie sich jedoch Dinge von verschiedener Gattung zueinander verhalten, das kann man nicht wissen, zum Beispiel eine Elle <Längenmaß> zu einer Kotyle <Hohlmaß> oder eine Choinix <Getreidemaß> zu weiß. Von gleicher Gattung jedoch sind die Größe und die Zahl für die Größe, so dass die Vergleichung auch von Zahlenverhältnissen entstehen wird. Es wird also von diesen ein gewisses Verhältnis **[99]** und eine Größenrelation geben. Und wenn auch die beiden Terme einander gleich sind, heißt das Verhältnis gleich zu gleich, gibt es doch bei der Gleichheit keinen Unterschied. Sind die Größen aber ungleich, spricht man von einem Verhältnis gemäß der Verschiedenheit.

Und der Abstand wird nicht der gleiche sein und das Verhältnis wird doppelt sein, und weil auch das Ungleiche etwas Zweifaches und nicht eine Einheit ist, wird auch der Abstand zwar der gleiche sein, das Verhältnis aber verschieden. Denn bei dem Verhältnis zwei zu eins und bei dem Verhältnis eins zu zwei ist der Abstand zwar derselbe, doch ist das Verhältnis doppelt und halb, so dass das Verhältnis des Abstandes verschieden ist. Nämlich auch bei mehreren Termen, bei denen das Verhältnis oft dasselbe ist, ist der Abstand verschieden, wie zum Beispiel bei der Proportion 4, 6, 9.

Dass jedoch das Verhältnis der Ungleichheit in zehn Gattungen besteht, und zwar mit fünf Vordergliedern gemäß dem Größeren und mit gleich vielen Hintergliedern gemäß dem Kleineren, und dass sie alle zusammen ihre Entstehung von der Gleichheit her haben, haben wir früher im Kapitel über die Relationen gelernt. Es gibt aber auch ein gewisses Verhältnis von Zahl zu Zahl, das <bei Platon> gerade deshalb so heißt, weil es unter keine der zehn Gattungen fällt (wie in den Darlegungen über Harmonie gezeigt werden wird), nämlich das Verhältnis des "Restes" bei den Termen 256 zu 243 <Es ist der Rest einer Quarte 4 : 3 nach Abzug eines Doppeltones $(9 : 8)^2$ von 256 : 243, wenn zwei Töne zu 9 : 8 von Diatessaron 4 : 3 gemessen werden>.

τῶν οὖν ἐν ἀριθμοῖς λόγων τοιούτων τινῶν ὄντων ἡ ἀναλογία σύλληψις ἔσται πλειόνων ἐν ὁμοιότητι λόγων ἐν ἐλαχίστοις τρισὶν ὅροις· λέγεται γὰρ λόγος συνῆφθαι, ὅταν κοινὸς ὅρος ᾖ μέσος πρὸς ἑκάτερον τῶν ἄκρων λόγον ἔχων· ὁ γὰρ κοινὸς ὅρος τοῦ λόγου συνάπτει.

διεζεῦχθαι δὲ λέγεται λόγος λόγου, ὅταν μὴ ἔχωσι κοινὸν ὅρον. τοῦτο δὲ ἐν τέτταρσιν ὅροις γίνεται, διὸ καὶ δοκεῖ τὸ ἀνάλογον τῆς ἀναλο**[100]**γίας διαφέρειν· τὸ μὲν γὰρ ἀνάλογον καὶ ἐν διεζευγμένοις ὅροις γίνεται, ἡ δὲ ἀναλογία κυρίως ἐπὶ τῶν κοινὸν ἐχόντων ὅρον τάττεται.

τῆς δὴ ἀναλογίας ἐν τρισὶν ὅροις γινομένης δεῖ ἔχειν τὸν πρῶτον ὅρον πρὸς τὸν δεύτερον λόγον ὃν ὁ δεύτερος ἔχει πρὸς τὸν τρίτον, ἢ ἀνάπαλιν, διὸ καὶ οὕτως ὠνομάσθαι· ἀνὰ γὰρ τὸν αὐτὸν λόγον ἔκκεινται οἱ ὅροι. ἔσονται δὲ καὶ διαφοραὶ αὐτῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· εἰ δὲ λόγος ἐστὶ καὶ ἐν ἰσότητι, δῆλον ὅτι καὶ ἀναλογία.

καὶ ταύτης στοιχειωδεστάτη ἡ ἐν μονάσιν, ἵνα καὶ ἀναλογικὴ μονὰς ὑπάρχῃ, εἶτα ἡ ἐν δυάσι καὶ τρίτη ἡ ἐν τριάσι καὶ ἑξῆς ἀκολούθως, ἀφ' ὧν κατὰ τὰ εἰρημένα ἔμπροσθεν τρία προστάγματα εὔτακτοι φύονται αἱ ἐν ἀνισότητι ἀναλογίαι.n.

Προληπτέον δὲ ὅτι κυρίως ἀναλογίαν ἐκάλουν οἱ παλαιοὶ τὴν γεωμετρικήν, κοινότερον δὲ ἤδη καὶ τὰς λοιπὰς πάσας μὴν γενικῶς μεσότητας. ὅτι δὲ εὐλόγως συνεστάλη τὸ ὄνομα ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς, ἐν τῷ περὶ αὐτῆς ῥηθήσεται λόγῳ.

μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητική τε καὶ ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ ᾿Αρχύταν αὖθις καὶ Ἵππασον ἁρμονικὴ μετακληθεῖσα, ὅτι τοὺς κατὰ τὸ ἡρμοσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα. ὑπεναντία δὲ πρότερον ἐκαλεῖτο, διότι ὑπεναντίον τι ἔπασχε τῇ ἀριθμητικῇ, **[101]** ὡς δειχθήσεται.

Da nun die Zahlenverhältnisse etwa dieser Art sind, wird die Proportion eine Zusammenfassung mehrerer Verhältnisse in Ähnlichkeit in mindestens drei Werten sein. Man sagt nämlich, ein Verhältnis sei eine verbundene Proportion, wenn in der Mitte ein gemeinsamer Term ist, der in einem Verhältnis zu jedem der beiden Außenglieder steht. Der gemeinsame Term nämlich des Verhältnisses bindet zusammen. Man sagt aber, ein Verhältnis sei von dem anderen getrennt, wenn die beiden keinen gemeinsamen Term besitzen. Dies aber tritt bei vier Termen ein, weshalb man auch meint, dass das Proportionale sich **[100]** von der Proportion unterscheidet. Das Proportionale nämlich gibt es auch bei getrennten Termen, während man eine Proportion im eigentlichen Sinn nur bei den Verhältnissen ansetzt, die einen gemeinsamen Term besitzen.

Bei einer Proportion aber, die in drei Größen entsteht, muss sich der erste Term zu dem zweiten verhalten wie sich die zweite Größe zur dritten verhält (oder auch rückwärts), und auch deshalb hat sie diesen Namen, weil die Terme nach demselben Verhältnis in Reihe dastehen. Es wird aber auch Unterschiede unter ihnen im gleichen Verhältnis geben; wenn jedoch ein Verhältnis auch in Gleichheit besteht, liegt selbstverständlich auch eine Proportion vor.

Die elementarste Proportionsform aber ist die mit <dem Unterschied> eins, damit auch die Einheit proportional ist, sodann die mit <dem Unterschied> zwei und drittens die mit drei und so weiter in Folge. Aus diesen entstehen entsprechend den vorher genannten drei Regeln wohlgeordnete Proportionen bei Ungleichheit.

Man muss aber vorweg sagen, dass die Alten von Proportion im eigentlichen Sinne bei der geometrischen Proportion sprachen, im weiteren Sinne aber auch schon bei allen übrigen gattungsmäßigen Mitteln. Dass jedoch mit gutem Grunde der Ausdruck auf die geometrische Proportion beschränkt war, werden wir in der Darstellung über diese erläutern.

In der älteren Zeit aber, bei Pythagoras und den ihm folgenden Mathematikern, gab es nur drei Mittel, nämlich das arithmetische, das geometrische und an dritter Stelle das manchmal "entgegengesetzt" <gegensätzlich; subkonträr> genannte, das von den Leuten um Archytas und Hippasos wiederum in "harmonisch" umbenannt wurde, weil es offenbar die dem Harmonischen und dem Taktvollen entsprechenden Verhältnisse umfasst. Als gegensätzlich <subkonträr> wurde es aber früher bezeichnet, weil ihm etwas der arithmetischen Proportion Entgegengesetztes widerfuhr, **[101]** wie wir zeigen werden.

ἀλλαγέντος δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα περὶ Εὔδοξον μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσανευρόντες μεσότητας τὴν τετάρτην ἰδίως ὑπεναντίαν ἐκάλεσαν, διὰ τὸ καὶ αὐτὴν ὑπεναντίον τι πάσχειν τῇ ἁρμονικῇ, ὡς δειχθήσεται· τὰς δὲ λοιπὰς δύο ἁπλῶς κατὰ τὴν τάξιν προσηγόρευσαν πέμπτην τε καὶ ἕκτην.

οἱ μὲν παλαιοὶ καὶ οἱ μετ' ἐκείνους τοσαύτας ᾤοντο δυνατὸν εἶναι συστῆσαι μεσότητας, τουτέστιν ἕξ· οἱ δὲ νεώτεροι τέσσαρας ἄλλας τινὰς προσανεῦρον, ἐκ τῶν ὅρων καὶ τῶν διαστημάτων προστεχνησάμενοι τὴν γένεσιν αὐτῶν.

Ἡ μὲν οὖν πρώτη ἀριθμητικὴ μεσότης ἐστίν, ὅταν τῶν ὅρων ὁ μέσος ἔχῃ <ἴσον> διάστημα πρὸς τοὺς ἑκατέρωθεν ἄκρους καὶ ὑπερέχῃ καὶ ὑπερέχηται ἴσῳ ἀριθμῷ, λόγους δὲ ἔχῃ διαφόρους πρὸς τοὺς ἄκρους, καὶ μείζονα μὲν τὸν πρὸς τὸν ἐλάττονα ὅρον, ἐλάττονα δὲ <πρὸς> τὸν μείζονα, συνεχεῖς δὲ τούτους ἑτερογενῶς.

ὑπόδειγμα δ' αὐτῆς ἐκτεθέντος ἀπὸ μονάδος τοῦ ἐφεξῆς ἀριθμοῦ καὶ ὡντινωνοῦν τριῶν ὅρων λαμβανομένων εἴτε συνεχῶν εἴτε τῶν παρ' ἕνα εἴτε τῶν παρὰ δύο ἢ τρεῖς ἢ τέσσαρας ἢ ὅσους τις ἂν θέλῃ, ὁ μέσος καθ' ἑκάστην ἐκλογὴν ἴσῳ ἀριθμῷ ὑπερέχει τὸν ἐλάττονα καὶ ὑπερέχεται ὑπὸ τοῦ μείζονος, οἷον α′ β′ γ′ καὶ α′ γ′ ε′ καὶ β′ δ′ ς′.

γεννᾶται δὲ ἐξ ἰσότητος οὕτως· πρῶτον ἴσον πρώτῳ, δεύτερον πρώτῳ καὶ δευτέρῳ, τρίτον **[102]** πρώτῳ καὶ δευτέρῳ καὶ τρίτῳ· πάλιν πρῶτον ἐκ πρώτου καὶ δευτέρου, δεύτερον ἐκ πρώτου καὶ δύο δευτέρων, τρίτον ἐκ πρώτου δύο δευτέρων <καὶ> τρίτου.

ἀλλ' ἐκ μὲν τῆς ἐπὶ μονάσι διὰ τῆς προτέρας ἐφόδου ἡ παρ' οὐδὲν τοὺς ὅρους ἔχουσα γεννᾶται, ἐκ δὲ τῆς ἐν δυάσιν ἡ παρ' ἕν, ἐκ δὲ τῆς ἐν τριάσιν ἡ παρὰ δύο καὶ ἐν τετράσιν ἡ παρὰ τρεῖς καὶ ἐφεξῆς ἀναλόγως.

Als jedoch der Name geändert war, erfanden danach die Mathematiker um Eudoxos drei andere Mittel dazu und bezeichneten das vierte als gegensätzlich im strengen Sinn, weil auch es etwas dem harmonischen Mittel Entgegengesetztes erfährt, wie wir zeigen werden. Die beiden übrigen nannten sie aber einfach nach der Ordnung fünftes und sechstes.

Die Alten und die <Forscher> nach ihnen meinten, man könne eben so viele Mittel zusammenstellen, nämlich sechs. Die Neueren aber fanden noch vier andere <Mittel> hinzu, indem sie deren Bildung aus den Termen und den Abständen noch dazu gestalteten.

Arithmetisches Mittel

Das erste Mittel ist nun das arithmetische, wenn bei den Termen der mittlere den gleichen Abstand zu den Außentermen auf beiden Seiten hat und um die gleiche Zahl größer oder kleiner ist, jedoch verschiedene Verhältnisse zu den Außentermen hat, und zwar ein größeres gegenüber dem kleineren Term und ein kleineres gegenüber dem größeren; und zwar sind diese <Verhältnisse> fortgesetzt, aber von verschiedener Art.

Der Beweis dafür ist folgender: Wenn man von der Eins ausgehend die ihr folgende Zahlenreihe aufstellt und drei beliebige Terme davon nimmt, entweder fortgesetzte oder jede zweite Zahl oder jede dritte, vierte oder fünfte Zahl oder jede wievielte man will, dann wird die mittlere Zahl bei jeder der ausgewählten Gruppen die kleinere <Zahl> um die gleiche Zahl übersteigen und wird um dieselbe <Zahl> von der größeren <Zahl> überragt; z.B. 1, 2, 3 und 1, 3, 5 und 2, 4, 6.

Aus der Gleichheit aber entsteht folgendes: Der erste Term ist gleich dem ersten, der zweite ist gleich dem ersten und dem zweiten, der dritte **[102]** aber ist gleich dem ersten und zweiten und dritten <1, 1 + 1, 1 + 1 + 1 = 1, 2, 3>. Wiederum besteht der erste Term aus dem ersten und zweiten, der zweite aber aus dem ersten und den beiden zweiten, der dritte aus dem ersten, den beiden zweiten und dem dritten <1 + 1, 1 + (2 · 1), 1 + (2 · 1) + 1 = 2, 3, 4>.

Aber aus der Reihe nur mit Einsen entsteht mit Hilfe der ersten Methode das Mittel, dessen Terme sich in nichts unterscheiden; aus der Reihe aber im Zweierschritt die mit dem Unterschied von jeweils eins, aus der zu Dreien die mit dem Unterschied von jeweils zwei und bei vieren die mit dem Unterschied von jeweils drei und so fort in entsprechender Weise <1 : 1 : 1; 1 : 2 : 3; 1 : 3 : 5 usw.>.

κἂν μὲν διπλάσιος ὁ πρότερος ᾖ λόγος, ἡμιόλιος πάντως ὁ δεύτερος, τριπλάσιος δὲ ὁ τῶν ἄκρων. ἂν δὲ τριπλάσιος, ἐπιδιμερὴς τρίτων, πενταπλάσιος δὲ ὁ τῶν ἄκρων. κἂν τετραπλάσιος, ἐπιτριμερὴς τετάρτων, ἑπταπλάσιος δὲ ὁ τῶν ἄκρων καὶ ἑξῆς ἀναλόγως.

ἴδιον δὲ τῆς μεσότητος ταύτης τὸ ὑποδιπλάσιον εἶναι τὸν μέσον ὅρον τῶν δύο ἄκρων. καὶ πάλιν, ὡς ἕκαστος ὅρος ἔχει πρὸς ἑαυτόν, οὕτως καὶ ἡ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, τοῦτο δέ ἐστι τὸ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ τοὺς ὅρους εἶναι. αἱ δὲ ἀπὸ μονάδος κατὰ τρεῖς ὅρους λαμβανόμεναι συζυγίαι ποιήσουσι πολυγώνων τοὺς δευτέρους ἐνεργείᾳ, τριάδι πάντας ἀλλήλων ὑπερέχοντας· ἐκ μὲν γὰρ τῆς α′ β′ γ′ ὁ δεύτερος ἐνεργείᾳ τρίγωνος γίνεται ὁ ϛ′, ἐκ δὲ τῆς α′ γ′ ε′ ὁ δεύτερος ἐνεργείᾳ τετράγωνος ὁ θ′, ἐκ δὲ τῆς γ′ δ′ ε′ ὁ δεύτερος ἐνεργείᾳ πεντάγωνος ὁ ιβ′ καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

ἐὰν δὲ οἱ ὅροι παρ' ἕνα ἐκλεγῶσιν ἀπὸ μονάδος, οὐκέτι ἄρξει τῶν πολυγώνων ὁ τρίγωνος, μεταστήσεται δὲ ἡ ἀφήγησις εἰς τετράγωνον· πρῶτος γὰρ ἔσται ὁ θ′ ὁ ἐκ τῆς α′ γ′ ε′ συζυγίας, οἱ δὲ ἑξῆς γινόμενοι λόγον τινὰ οὐκ ἄτακτον ἕξουσιν.

ἐὰν δὲ παρὰ δύο παράλειψιν ἡ **[103]** ἐκλογὴ γίνηται, ἵν' ᾖ α′ δ′ ζ′, ἄρξει πεντάγωνος ὁ ιβ′. ἐὰν δὲ κατὰ τριῶν παράλειψιν, ἔσται ἐκ τῶν α′ ε′ θ′ ἑξάγωνος ὁ ιε′, καὶ οὕτως μέχρι παντὸς ἀκολούθως τῇ αὐτῶν τῶν πολυγώνων γενέσει. διότι μὲν γὰρ οἱ τρίγωνοι ἐγίνοντο ἐκ τῶν παρ' οὐδέν, ἄρξει ἐν τῇ πρώτῃ συστάσει τῶν πολυγώνων τρίγωνος ὁ ϛ′, διότι δὲ ἐκ τῶν παρ' ἕνα ἐγίνοντο οἱ τετράγωνοι, ἀφηγεῖται ἐν τῇ δευτέρᾳ συστάσει ὁ θ′ τετράγωνος, καὶ ἔτι ἐκ τῶν παρὰ δύο οἱ πεντάγωνοι, καὶ τοῦτο δι' ὅλου ἔσται ἀκολούθως.

Und wenn das erste Verhältnis doppelt ist <2 : 1>, dann ist durchgängig das zweite eineinhalb <3 : 2>, und dreifach ist das Verhältnis der beiden Außenterme <3 : 1>. Ist aber das erste Verhältnis dreifach, dann ist das zweite einzweidrittelfach und das der Außenterme fünffach <5 : 3 : 1; 5 : 1>. Und wenn das erste Verhältnis vierfach ist, dann ist das zweite Verhältnis Eindreiviertelfach, das der Außenterme aber siebenfach und so weiter in entsprechender Weise <7 : 4 : 1; 7 : 1>.

Die Eigenheit aber dieses Mittels besteht darin, dass der mittlere Wert zweimal kleiner als die beiden Außenterme ist. Und wiederum: So wie sich jeder Term zu sich selbst verhält, so wird sich auch das Überragende zum Überragenden verhalten, und dies bedeutet, dass sich die Terme jeweils um das Gleiche überragen <1 : 1; 2 : 2; 3 : 3>. Die Verbindungen aber, die von der Eins aus in drei Termen genommen sind <z.B. 1, 2, 3 oder 1, 3, 5>, werden die aktuell zweiten der Polygone <Vieleckzahlen> hervorbringen, die einander alle jeweils um drei überragen. Nämlich aus 1, 2, 3 wird aktuell die zweite Dreieckszahl, die 6 <1 + 2 + 3 = 6>, aus 1, 3, 5 die zweite aktuelle Quadratzahl, die 9 <1 + 3 + 5 = 9>, aus der Reihe 3, 4, 5 die zweite aktuelle Fünfeckzahl, die 12 <3 + 4 + 5 = 12>, und so immer weiter in Folge .

Wenn aber die Terme von der Eins an um zwei differierend herausgenommen werden, wird nicht mehr die Dreieckszahl den Anfang der Vielecke bilden, sondern die Führerrolle wird auf das Quadrat übergehen. Es wird nämlich die erste Zahl die 9 sein, die aus der Verbindung 1, 3, 5 hervorgeht <1 + 3 + 5 = 9>, und die in der Folge entstehenden Zahlen werden ebenfalls kein unregelmäßiges Verhältnis aufweisen.

Geht die Auswahl aber so vor sich, dass immer zwei Zahlen ausgelassen werden, **[103]** damit die Reihe 1, 4, 7 entsteht, dann wird die Fünfeckzahl 12 den Anfang bilden <1 + 4 + 7 = 12>. Lässt man aber jeweils drei Zahlen aus, so wird aus den Zahlen 1, 5, 9 die Sechseckzahl 15 entstehen <1 + 5 + 9 = 15>, und so immer weiter in Folge mit der Erzeugung gerade der Vieleckzahlen. Weil nämlich die Dreieckzahlen aus der Zahlenreihe ohne Übersprung entstanden, wird bei der ersten Zusammenstellung der Vielecke die Dreieckzahl 6 den Anfang bilden <1 + 2 + 3 = 6>; weil aber aus der Reihe mit jeweils einer übersprungenen Zahl die Quadratzahlen entstanden, wird bei der zweiten die Quadratzahl 9 den Anfang bilden <1 + 3 + 5 = 9>, und weiter entstehen bei der Reihe mit zwei übersprungenen Zahlen die Fünfeckzahlen, und so wird es durchgehend in Folge sein.

ἐπεὶ δὲ ἑξάδος ἀποτελεστική ἐστιν ἡ πρώτη παρ' οὐδὲν ἀπὸ μονάδος συζυγία, ἡ πρώτη α′ β′ γ′ εἰδοποιήσει τὰς ἑξῆς αὐτῇ, μηδενὸς ὅρου κοινοῦ λαμβανομένου μηδὲ μὴν παρελλειπομένου, ἀλλὰ μετὰ τὴν α′ β′ γ′ λαμβανομένης τῆς δ′ ε′ ϛ′, εἶτα ζ′ η′ θ′ καὶ ἑξῆς ἀκολούθως· πᾶσαι γὰρ αὗται ἑξάδες γενήσονται μεταλαμβανούσης τὸν μονάδος τόπον ἀεὶ τῆς δεκάδος, τουτέστιν εἰς μονάδα ἀναγομένης·

οὕτως γὰρ αὐτὴν καὶ δευτερωδουμέναν μονάδα καλεῖσθαι ἐλέγομεν πρὸς τῶν Πυθαγορείων, καὶ τριωδουμέναν τὴν ἑκατοντάδα, καὶ τετρωδουμέναν τὴν χιλιάδα. ἡ μὲν γὰρ δ′ ε′ ϛ′ ποιεῖ ἀριθμὸν τὸν ιε′· ἀναγομένης δὲ τῆς δεκάδος εἰς μονάδα, ὁ πέντε προσλαβὼν αὐτὴν ἑξὰς γίνεται.

πάλιν ἡ ζ′ η′ θ′ συνθεῖσα ποιεῖ τὸν κδ′ ἀριθμόν, οὗ τὰ κ′ εἰς δύο μονάδας ἀναγαγὼν προστίθημι τῷ δ′, καὶ ἔχω πάλιν ἑξάδα. πάλιν ι′ ια′ ιβ′ συνθεὶς ποιῶ λγ′, ὧν τὰ λ′ τριάς ἐστιν, ἣν προσθεὶς τοῖς τρισὶν ἔχω ὁμοίως ἑξάδα, καὶ τοῦτο **[104]** ὁμοίως ἔσται δι' ὅλου.

καὶ ἡ μὲν πρώτη ἑξὰς οὐκ ἔχει μετάθεσιν δεκάδος εἰς μονάδα, ὡς ἂν εἰδοποιὸς καὶ στοιχεῖον τῶν μετ' αὐτὴν ὑπάρχουσα· ἡ δὲ δευτέρα μιᾶς μονάδος μετάθεσιν ἕξει, ἡ δὲ τρίτη δυεῖν καὶ ἡ τετάρτη τριῶν καὶ ἡ πέμπτη τεσσάρων καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

ὅσαι δ' ἂν ὦσιν αἱ μετατιθέμεναι δεκάδες, τοσαῦται καὶ αἱ ἐννεάδες ἀφαιρεθήσονται ἐκ τοῦ ὅλου συστήματος, ἵνα τὸ λεῖπον ὁμοίως ἑξὰς ᾖ· τοῦ γὰρ ιε′ μιᾶς δεκάδος ἔχοντος μετάθεσιν, ἐὰν ἀφέλω μίαν ἐννεάδα, λειφθήσεται ἑξάς. τοῦ δὲ κδ′ δύο ἔχοντος δεκάδας τὰς μεταποιουμένας ἐὰν ἀφέλω δύο ἐννεάδας, λειφθήσεται πάλιν ἑξάς, καὶ τοῦτο δι' ὅλου συμβήσεται.

καὶ πλέονα δ' ἄν τις εὕροι παρακολουθοῦντα γλαφυρὰ τῇ ἀριθμητικῇ μεσότητι, ἅπερ ἑκόντες τὰ νῦν παραλείπομεν στοχαζόμενοι τῆς κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν συμμετρίας. ταύτην δ' εἶπεν ὁ Πλάτων μεσότητα ‘ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερεχομένην, ἴσῳ δὲ ὑπερέχουσαν’.

Da aber die erste Verbindung von der Eins an ohne übersprungene Zahl die Zahl sechs erzeugt <1 + 2 + 3 = 6>, wird also die erste Reihe 1, 2, 3 das Formvorbild für alle ihr folgenden Verbindungen bilden, wobei kein Term gemeinsam genommen wird und erst recht keiner ausgelassen wird, sondern nach der Reihe 1, 2, 3 die Reihe 4, 5, 6 genommen wird, dann 7, 8, 9 und so weiter in Folge. Alle diese <Verbindungen> werden nämlich Sechserzahlen werden <1 + 2 + 3 = 6; 4 + 5 + 6 = 15; 7 + 8 + 9 = 24; 6 = 6; 1 + 5 = 6; 2 + 4 = 6>, wobei die Stelle der Eins immer die Zehn einnehmen wird, das heißt sie wird zur Eins zurückgeführt.

Wir sagten ja, dass die Zehn auch als "zum zweitenmal auftauchende" Einheit von den Pythagoreern genannt wurde, und die Hundertzahl als dreifach wiederkehrende Einheit und die Tausenderzahl als vierfach wiederkehrende Einheit. Die Reihe 4, 5, 6 nämlich erzeugt die Zahl 15 <4 + 5 + 6 = 15>. Führt man jedoch die Zehnerzahl auf die Eins zurück, entsteht die Zahl sechs als die Summe von fünf und eins.

Wiederum wird die Summe der <Zahlen> 7, 8, 9 die Zahl 24 ergeben, wovon ich die 20 auf zweimal Eins zurückführe und die 4 dazu addiere, worauf ich wieder die Zahl sechs erhalte <1 + 1 + 4 = 6>. Wiederum zähle ich 10, 11 und 12 zusammen und bekomme die Zahl 33, von der die 30 eine Dreiheit <3 mal 1 > ist, die ich zu der <zweiten Zahl> 3 addiere und in gleicher Weise die Sechs erhalte <3 + 3 = 6>, und so **[104]** wird es immer weiter durchgehend sein.

Die erste Sechs aber wird keine Umstellung einer Zehnerzahl zu ihrer Einerzahl haben, weil sie ja Formvorbild und Element der <Zahlgebilde> nach ihr ist. Die zweite Zahl aber <15> wird eine Umstellung einer Eins haben, die dritte Zahl aber bekommt zweimal eine Eins umgestellt <1 + 1 = 2; die vordere Zahl von 24>, die vierte drei und die fünfte vier und so weiter in Folge.

Wie viele Zehner aber <auf Einer> umgestellt werden, so viele Neuner werden auch von der ganzen Zusammenstellung abgezogen werden, damit die übrig bleibende Zahl immer sechs bleibt; da nämlich die 15 die Umstellung einer Zehn <zur Eins> hat, bleibt, wenn ich einmal neun wegnehme, die Zahl sechs übrig. Und da die Zahl 24 zwei Zehner beigefügt hat, die umgeändert sind <nämlich von Einern in Zehner>, wird wiederum die Zahl sechs übrig bleiben, wenn ich zweimal die Neun abziehe. Und so wird es durchgehend sein.

Noch weitere schöne Folgerungen, die sich aus dem arithmetischen Mittel ergeben, könnte man finden, die wir für jetzt jedoch bewusst übergehen, weil wir nach der zu einer Einführung passenden Ausgewogenheit streben. Von diesem <dem arithmetischen> Mittel sagte aber Platon, "daß in ihr die Mittelzahl um das Gleiche übertroffen werde als auch übertreffe".

Ἡ δὲ δευτέρα μεσότης ἡ γεωμετρικὴ κυρίως ἀναλογία κέκληται, διότι λόγον τὸν αὐτὸν οἱ ὅροι περιέχουσιν, ἀνὰ τὸν αὐτὸν λόγον διεστῶτες· ὃν γὰρ λόγον ἔχουσιν οἱ ὅροι πρὸς ἀλλήλους ἢ ἀπ' ἐλάττονος ἐπὶ μείζονα διὰ τοῦ κοινοῦ ἢ ἀνάπαλιν, τοῦτον ἔχει καὶ διαφορὰ πρὸς διαφοράν·

αἴτιον δέ τι κατ' ἴσην διαφορὰν οὐ διαστήσονται οἱ ὅροι ὡς ἐπὶ τῆς προτέρας. δυνατόν τε καὶ ἐν τέτταρσιν ὅροις τὸ ἀνάλογον γενέσθαι διεζευγμένων τῶν λόγων.

καὶ ἵνα τὸ Πλα**[105]**τωνικὸν ἐνθάδε προσαρμόσωμεν τῇ ἀναλογίᾳ λεκτέον·[26] 'ὁπόταν γὰρ ἀριθμῶν τριῶν εἴτε ὄγκων εἴτε δυνάμεών τι κοινωνῇ τὸ μέσον, ὅ τι περ τὸ πρῶτον πρὸς αὐτό, τοῦτο αὐτὸ πρὸς τὸ ἔσχατον, καὶ πάλιν αὖθις, ὅ τι τὸ ἔσχατον πρὸς τὸ μέσον, τὸ μέσον πρὸς τὸ πρῶτον, τότε τὸ μέσον μὲν πρῶτον καὶ ἔσχατον γινόμενον, τὸ δὲ ἔσχατον καὶ τὸ πρῶτον αὖ μέσα ἀμφότερα, ταῦθ' οὕτως ἐξ ἀνάγκης τὰ αὐτὰ εἶναι καὶ ξυμβήσεται.'

καὶ πρὸ Πλάτωνος δὲ τὰ αὐτὰ διειλήφεσαν Πυθαγορικοὶ περὶ αὐτῆς. Τίμαιός τ' οὖν ὁ Λοκρὸς ἐν τῷ Περὶ φύσεως κόσμω καὶ ψυχᾶς (ἀφ' οὗπερ ἐφοδιασθέντα Πλάτωνα τὸν διὰ τοῦτο φερώνυμον Τίμαιον συντάξαι λέγουσιν, ὧν ἐστιν καὶ ὁ τοὺς σίλλους ποιήσας Τίμων λέγων οὕτως· 'πολλῶν δ' ἀργυρίων ὀλίγην ἠλλάξατο βίβλον ἔνθεν ἀφορμηθεὶς τιμαιογραφεῖν ἐπεχείρει') οὕτω πώς φησι· 'τριῶν γὰρ ὡντινωνοῦν ὅρων, ὅταν καὶ τὰ διαστάματα κατὰ τὸν αὐτὸν ἐστάθη λόγον ποτ' ἄλλα, τότε δὴ τὸ μέσσον ῥυσμῶ δίκας ὁρήμεθα ποττὸ πρᾶτον, ὅ τι περ τὸ τρίτον ποτ' αὐτὸ κἂν πάλιν καὶ παραλλάξ.'

[26] Timaios 31 c f

Geometrisches Mittel

Das zweite Mittel aber, das geometrische, wird Analogie <Proportion> im eigentlichen Sinne genannt, weil die Terme dasselbe Verhältnis umfassen, da sie ihre Abstände im gleichen Verhältnis haben; denn dasselbe Verhältnis, das die Terme untereinander oder durch den gemeinsamen Term vom Kleineren zum Größeren oder umgekehrt haben, dasselbe Verhältnis hat auch die eine Differenz zur anderen Differenz.

Der Grund dafür aber ist wohl der, dass hier die Terme nicht (wie bei dem vorigen Mittel <dem arithmetischen>) um die gleiche Differenz Abstand voneinander haben werden. Es ist auch möglich, dass in vier Termen Entsprechendes entsteht, wobei die Verhältnisse voneinander getrennt sind.

Und um hier **[105]** Platons Lehre mit der Proportion zu verbinden, müssen wir zitieren: "Denn wenn von drei wie auch immer beschaffenen Zahlen oder Massen oder Kräften <Potenzen> die mittlere gemeinsam ist und sich zur letzten verhält wie die erste zu ihr <d.h. der mittleren>, und umgekehrt wiederum die mittlere zur ersten wie die letzte zur mittleren sich verhält, dann wird sich auch ergeben, dass, wenn die mittlere Größe zur ersten und letzten wird, die letzte und erste aber beide zu mittleren werden, alle so der Notwendigkeit gemäß dasselbe werden."

Und schon vor Platon haben Pythagoreer dasselbe über das geometrische Mittel auseinandergesetzt. Timaios von Lokroi jedenfalls schrieb darüber in seinem Buch "Über die Natur des Kosmos und der Seele" (und man sagt, Platon habe daraus sein Material genommen und daher das ebenfalls "Timaios" betitelte Buch geschrieben. Zu denen, die so sagen, gehört auch Timon, der die "Sillen" <Spottgedichte> schrieb und der so sagt: "Um vieles Geld hat er <Platon> sich ein kleines Buch eingetauscht und fing dann an timaiosmäßig zu schreiben"). Timaios sagt etwa folgendes: "Wenn von drei beliebigen Termen auch die Abstände dasselbe Verhältnis zueinander haben, dann sehen wir, daß sich das mittlere Glied in gerechter Weise zum ersten verhält wie sich auch das dritte zum mittleren, und genau dasselbe Verhältnis wird vorherrschen, wenn wir es umgekehrt und abwechselnd betrachten".

ἔστι δὲ ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ, τουτέστι τοῦ πηλίκου, κατὰ λόγους **[106]** ἴσους καὶ ὁμοίους διεστῶσα· ἡ δὲ ἀριθμητικὴ τοῦ διῃρημένου ποσοῦ οὐκέτι μὲν λόγοις, ἀριθμοῖς δὲ ἴσοις κατὰ τὰς ὑπεροχὰς διεστῶσα. καὶ ἐν μὲν ταύτῃ λόγοι ἕτεροι, διαστήματα δὲ ταὐτά· ἐν δὲ τῇ γεωμετρικῇ ἀνάπαλιν λόγοι μὲν οἱ αὐτοί, διαφοραὶ δὲ ἕτεραι. γεννᾶται δὲ καὶ αὕτη ἀπὸ ἰσότητος τοῖς ἐπὶ τῶν σχέσεων τρισὶ τοῖς αὐτῶν προστάγμασι· πάντες γὰρ ἐκεῖ τρεῖς ὅροι κατὰ ταύτην ἀναλογοῦσι τὴν μεσότητα ἔχοντες οὕτως· ὡς ὁ μείζων πρὸς τὸν μέσον ὅ τε μέσος πρὸς τὸν ἐλάττονα, καὶ ἡ τοῦ μείζονος παρὰ τὸν μέσον ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάττονα. ἴδιον δ' αὐτῆς τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἴσον ἀποτελεῖν, ἐὰν τρεῖς ἢ καθόλου περισσοὶ ὦσιν οἱ ὅροι· εἰ δὲ τέσσαρες ἢ ὅλως ἄρτιοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ποιήσει. καὶ ἐπὶ μὲν ταύτης κατ' ἔγκρασιν οἱ ὅροι ἀλλήλους μηκύνουσιν, ἐπὶ δὲ τῆς ἀριθμητικῆς κατὰ σύνθεσιν, ὅτι τοιοῦτον τὸ διῃρημένον ποσὸν καὶ τὸ πλῆθος, περὶ ὃ πάλιν ἰδίως ἡ ἀριθμητικὴ καταγίνεται, ὡς ἐν ἀρχῇ τῆς εἰσαγωγῆς ἡμῖν εἴρηται. ἐν μὲν οὖν πολλαπλασίοις ἀνάλογον ἐκθέσεσι παντοίαις πάμπολλα αὐτῆς εὑρήσομεν ὑποδείγματα, ἐν δὲ ἐπιμορίοις καὶ ἐπιμερέσιν ἀεὶ καὶ μᾶλλον σπανιώτερα κατὰ τὴν τοῦ μερικοῦ ὀνόματος πρόοδον.

τὸ δὲ αἴτιον προφανές, ὅτι πολυπλασιάζεσθαι μὲν πᾶς ἀριθμὸς δυνατός, μέρη δὲ πάντα δέξασθαι οὐ πᾶς, ἀλλ' ἡμίση οἱ παρ' ἕνα, τρίτα δὲ οἱ παρὰ τὰ δύο, τέταρτα δὲ οἱ παρὰ τρεῖς, πέμπτα δὲ οἱ παρὰ τέσσαρας καὶ ἑξῆς ἀεὶ καὶ μᾶλλον ἀραιότεροι οἱ μεγαλωνυμώτερα μέρη ἔχοντες. εἰ δὲ λόγοι ἀεὶ καὶ **[107]** μᾶλλον ὀλιγώτεροι ἔσονται διὰ τὴν σπανιότητα τῶν ἐπιδεξομένων τὸ μόριον ἀριθμῶν καθ' ὃ ἐπιμόριον ἐπιμερεῖς γενήσονται, πολὺ μᾶλλον σπανιώτεραι αἱ ἀναλογίαι γενήσονται διὰ τὴν τοῦ τρίτου πρόσθεσιν ὅρου· οὐ γὰρ ὁ πρὸς τῷ ὅρῳ τῷ μέσῳ φέρ' εἰπεῖν καὶ ἥμισύ τινος ἔχων, καὶ αὐτὸς πάντως ἥμισυ ἔχει, οὐδὲ ὁ σὺν τρίτῳ μέρει περιέχων τινά, καὶ αὐτὸς τρίτον ἔχει, καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς μερῶν παραπλησίως.

Die geometrische Proportion aber hat die fortgesetzte Größe, das heißt eben die geometrische Größe, die in gleichen und identischen Verhältnissen **[106]** ihre Abstände hat, während die arithmetische Proportion einer zerlegten Größe nicht mehr in gleichen Verhältnissen, dafür aber in gleichen Zahlen entsprechend der Zunahme der Größen ihre Abstände hat, und so gibt es in ihr <der arithmetischen Proportion> verschiedene Verhältnisse, hingegen gleiche Abstände, während es andererseits in der geometrischen Proportion die gleichen Verhältnisse, aber verschiedene Differenzen gibt. Auch die geometrische Proportion entsteht aber aus der Gleichheit nach den drei Anordnungen über die Relationen; denn dort stehen alle drei Terme nach diesem Mittel in einem Verhältnis, indem sie sich so verhalten: Wie sich der größere <Term> zum mittleren, so verhält sich der mittlere zum kleineren, und der Überschuss des größeren <Terms> gegenüber dem mittleren entspricht dem Überschuss des mittleren <Terms> im Verhältnis zum kleineren.Es ist aber eine Besonderheit der geometrischen Proportion, dass sie das Produkt der Außengrößen dem Produkt des Mittelterms mit sich selbst gleich hat, wenn es drei oder durchwegs ungerade Terme sind. Sind es aber vier oder durchgehend gerade <Terme>, ist das Produkt der Außenterme gleich dem Produkt der Mittelterme. Auch multiplizieren in der geometrischen Proportion die Terme einander entsprechend der Mischung, bei der arithmetischen hingegen addieren sie sich entsprechend der Zusammensetzung, weil der Abstand ebenso groß ist wie die Menge, mit der sich wieder besonders die Arithmetik beschäftigt, wie wir zu Beginn der Einführung gesagt haben. In gleicher Weise werden wir bei den verschiedenen Reihen des Vielfachen sehr viele Beispiele der geometrischen <Proportion> finden, bei den Überteiligen und Überteilenden aber immer seltener entsprechend der Zunahme des Nenners.

Die Ursache dafür liegt aber offen zutage: Jede Zahl kann multipliziert werden, alle Brüche aber kann nicht jede Zahl bekommen, sondern Hälften kann nur jede zweite Zahl haben, Drittel nur jede dritte Zahl, Viertel nur jede vierte Zahl <4, 8, 12 usw.>, Fünftel nur jede fünfte Zahl und so weiter, und so werden die Zahlen, die Brüche mit größeren Nennern haben, immer weniger. Wenn aber auch die Verhältnisse immer **[107]** weniger werden wegen des Seltenerwerdens der Zahlen, die den Bruch annehmen, nach dem ein Überteiliges oder Überteilende entstehen, dann werden die Proportionen noch viel seltener werden durch die Hinzufügung des dritten Terms. Nicht nämlich bildet zum Beispiel die Zahl, die zusätzlich zum mittleren Term auch die Hälfte einer Zahl hat, auch selbst durchgehend die Hälfte einer anderen, und eine Zahl, die eine andere mit einem Drittel umfasst, bildet nicht selbst ein Drittel einer anderen, und so ähnlich ist es auch bei den folgenden Brüchen.

ἀλλ' ἵνα ἀναλογία γίνηται, ἀνάγκη τοὺς περιεκτικοὺς ὅρους τῶν λόγων πυθμένας ἀλλήλους πολυπλασιάσαι, οἵπερ καὶ ἐμφαντασθήσονται ταῖς διαφοραῖς τῆς ἀναλογίας. ἵνα δὲ κοινόν τι ὑπόδειγμα λάβωμεν πυθμενικῶν ἀναλογιῶν κατὰ πάντα τὰ εἴδη τοῦ ἐπιμορίου ἀρξαμένου ἀπὸ ἡμιολίου καὶ πρὸς τούτοις πολλαπλασίων τοῦ πρώτου, τουτέστι διπλασίου, ἐκθετέον κἀνταῦθα στιχηδὸν ταὐτούς τε καὶ ἑτέρους ἑκατέρους ἀπὸ τῆς οἰκείας ἀρχῆς, καὶ συναρμοστέον κατ' ἐμπλοκὴν αὐτούς, ὥσθ' ἑκάστην συζυγίαν τριῶν ὅρων εἶναι, καὶ κατὰ συνέχειάν γε ἀεὶ τῆς προτέρας συζυγίας τοῦ ὑστάτου ἄρχοντος τῆς μετ' αὐτήν· κατὰ γὰρ τὴν ἀδιάζευκτον ἐκλογὴν ἕκαστοι τρεῖς ὅροι ἀπὸ μονάδος παραδείξουσι τὸ ζητούμενον.

Ἡ δὲ τρίτη μεσότης ἡ καλουμένη ἁρμονική ἐστιν, ὅταν τριῶν ὅρων ἀνίσων ὡς ἔχει ὁ μείζων ὅρος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ μειζόνων ὅρων πρὸς ὑπεροχὴν ἐλαττόνων, τουτέστιν ἡ τοῦ μείζονος παρὰ τὸν μέσον ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάττονα. ἑτέρα δέ ἐστιν αὕτη παρὰ τὰς πρὸ αὐτῆς, **[108]** ὅτι ὁ μέσος ὅρος οὔτε ἀριθμῷ τῶν ἄκρων ἴσῳ ὑπερέχει καὶ ὑπερέχεται, οὔτ' ἐν λόγῳ ἐστὶν ὁμοίως πρὸς αὐτούς. πυθμένες δὲ αὐτῆς β′ γ′ ϛ′ ἢ γ′ δ′ ϛ′· κατὰ γὰρ τούτων πολλα-πλασιασμὸν ἢ ἐπιμοριασμόν, ἐάν γε ἐπιδέχωνται, ἄλλαι πολλαὶ φύσονται. καλοῦσι δέ τινες τὴν μεσότητα ταύτην ἑστηκυῖαν, ὅτι ἐν μόνοις τοῖς εἰρημένοις πυθμενικοῖς ὅροις ὥσπερ ἑστῶσι καὶ πρωτοτύποις φαίνεται· ἐπὶ γὰρ τῆς ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρικῆς ἀπείρους συζυγίας ἔνεστι συντάττεσθαι. ἀλλ' οὖν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς πυθμενικαῖς οἵ τε ἄκροι ἐν διπλασίῳ καὶ τριπλασίῳ λόγῳ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ τῶν μειζόνων πρὸς τοὺς μέσους διαφοραὶ πρὸς τὰς τῶν μέσων πρὸς τοὺς ἐλάττονας. ἁρμονικὴ δὲ κέκληται ἡ μεσότης ὅτι σπερματικῶς τοὺς ἐν ἁρμονίᾳ λόγους ἔστιν ἐνιδεῖν αὐτῇ, οἷον ἐν τῇ γ′ δ′ ϛ′ τὸ διὰ τεσσάρων λεγόμενον σύμφωνον, ὅπερ ἐλάχιστόν ἐστι τῶν ἄλλων συμφώνων διαστημάτων, ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ θεωρούμενον ἐν ὅροις ἐστὶ τοῖς ἐλάττοσι, τουτέστι τῷ δ′ πρὸς γ′·

Damit aber eine Proportion entsteht, muss man die Terme, die die Verhältnisse als Grundformen umfassen, miteinander multiplizieren, und diese werden dann auch durch die Unterschiede der Proportion zur Erscheinung kommen. Damit wir aber ein allgemeines Beispiel der proportionalen Grundformen erhalten, müssen wir entsprechend allen Formen des Überteiligen, beginnend beim Anderthalbfachen und dazu dem ersten Vielfachen, das ist dem Doppelten, eine Reihe bilden und dann in Zeilen diese Terme selbst hinstellen und die anderen, beide vom eigenen Anfang an, und man muss sie so verflochten hinstellen, dass jede Verbindung drei Größen hat und immer im Zusammenhang mit der vorhergehenden Verbindung deren letzte Zahl die erste der nächsten Gruppierung bildet. Wenn man nämlich die Zahlen der Reihe nach ohne Lücke auswählt, werden immer drei Terme von der Eins an das Gesuchte erkennen lassen.

Harmonisches Mittel

Das dritte Mittel aber ist das sogenannte harmonische, wenn nämlich bei drei ungleichen Termen sich so wie der größere Term zum kleinsten ebenso der Überschuss der größeren Terme zum Überschuss der kleineren verhält, das heißt der Überschuss des größeren zum mittleren verhält sich ebenso wie der Überschuss des mittleren <Terms> zum kleineren. Dieses <Mittel> unterscheidet sich aber von den <Mitteln> vor ihm, **[108]** weil der mittlere Term weder um die gleiche Zahl die beiden Grenzwerte übersteigt und von diesen überstiegen wird, noch in gleichmäßigem Verhältnis zu ihnen steht <wie in dem geometrischen Mittel>. Ihre Grundformen aber sind 2, 3, 6 oder 3, 4, 6. Denn entsprechend ihrer Vervielfachung oder Überteiligkeit, jedenfalls, wenn diese möglich sind, werden viele andere <Mittel> entstehen. Manche nennen dieses Mittel aber "stehend", weil es grundsätzlich nur in den genannten Grundtermen, die wie feststehend und als Urformen dastehen, erscheint; bei dem arithmetischen und geometrischen <Mittel> kann man nämlich unendlich viele Verbindungen zusammenstellen. In den beiden genannten Grundformen <des harmonischen Mittels> aber stehen nun die Außenterme in doppeltem oder dreifachem Verhältnis zueinander <6 : 2 dreifach; 6 : 3 zweifach>, und ebenso verhalten sich die Differenzen der größeren Terme zu denen der mittleren wie die der mittleren zu den kleineren. Harmonisch aber wird das Mittel genannt, weil man dadurch keimhaft die Verhältnisse in der Harmonie erkennen kann; zum Beispiel in der Reihe 3, 4, 6 den sogenannten Diatessaron-Zusammenklang <das harmonische Intervall 4 : 3, Quarte>, der das kleinste der anderen zusammenklingenden Intervalle darstellt, nach dem Verhältnis Eineindrittel betrachtet ist es in den <beiden> kleineren Gliedern vorhanden, das heißt in der 4 zur 3.

τὸ δὲ διὰ πέντε, ὅπερ ἑξῆς μετὰ τὸ διὰ τεσσάρων ἐστὶν ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ ὂν ἐν τοῖς μείζοσιν ὅροις, τουτέστι τῷ ϛ′ πρὸς δ′·

τὸ δὲ διὰ πασῶν σύστημα ὂν ἀμφοτέρων τῶν προειρημένων καὶ ἐν διπλασίονι λόγῳ θεωρούμενον ἐν τοῖς ἄκροις, τουτέστι τῷ ϛ′ πρὸς γ′. καὶ ἔτι ἡ τοῦ ϛ′ διαφορὰ παρὰ τὸν δ′ πρὸς τὴν τοῦ δ′ παρὰ τὸν γ′ ὁμοίως ἐν διπλασίῳ λόγῳ ἐστί, κατὰ τὴν διὰ πασῶν συμφωνίαν.

καὶ μὴν καὶ ἡ δύναμις τῶν ἄκρων ἐπ' ἀλλήλους γε**[109]**νομένων τὰ ιη′ πρὸς τὴν τοῦ μέσου ἐφ' ἑαυτὸν γενομένου τὴν ιϛ′ ἐν ἐπογδόῳ λόγῳ οὖσαν περιέχει τὸ τονιαῖον διάστημα· ἐν γὰρ τοῖς πρωτοτύποις ὅροις τοῖς γ′ δ′ ϛ′ οὐκ ἐνῆν τὸν λόγον τοῦ διαστήματος τούτου φανῆναι, διότι οὐδεὶς αὐτῶν ὀγδόου μέρους ἐστὶ παρεκτικός, καθ' ὃ ἄλλος τις αὐτοῦ ἔσται ἐπόγδοος.

πάλιν ἡ δύναμις τοῦ μεγίστου ἐστὶ τριπλασία, ὁ δὲ τριπλάσιος λόγος περιέχει τὴν διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε συμφωνίαν, ἡ δὲ δύναμις καθ' αὑτὸν τοῦ μεγίστου πρὸς τὴν δύναμιν τοῦ ἐλαχίστου λόγον ἕξει τετραπλάσιον, ὃς περιέχει τὴν δὶς διὰ πασῶν συμφωνίαν.

πάλιν δὲ ἐξ ἄλλης ἀρχῆς δύναμις τοῦ μὲν ἐλαχίστου πρὸς τὸν μέσον ιβ′, τοῦ δ' αὐτοῦ πρὸς τὸν μέγιστον ιη′, τοῦ δὲ μέσου πρὸς τὸν μέγιστον κδ′· ἰδία δὲ τοῦ μὲν γ′ καθ' ἑαυτὸν θ′, τοῦ δὲ δ′ ιϛ′, τοῦ δὲ ϛ′ λϛ′.

καὶ ἔστιν ἐν μὲν ἐπιτρίτῳ λόγῳ τῷ τὸ διὰ τῶν τεσσάρων περιέχοντι τά τε κδ′ τῶν ιη′ καὶ τὰ ιβ′ τῶν θ′· ἐν δὲ ἡμιολίῳ τῷ διὰ πέντε τά τε ιη′ τῶν ιβ′ καὶ τὰ κδ′ τῶν ιϛ′ καὶ τὰ λϛ′ τῶν κδ′, ἐν δὲ τριπλασίῳ λόγῳ, ἵνα τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε συστῇ, ὁ λϛ′ πρὸς τὸν ιβ′, ἐν δὲ τετραπλασίῳ, ἵνα τὸ δὶς διὰ πασῶν φανῇ, ὁ λϛ′ πρὸς θ′, ἐν δὲ ἐπογδόῳ πρὸς τὴν τοῦ τονιαίου διαστήματος ἔμφασιν τὰ ιη′ τοῦ ιϛ′, ὡς προερρήθη.

Das Intervall Diapente <das harmonische Intervall 3 : 2, Quinte>, das im Anschluss an das Intervall Diatessaron kommt, ist im Verhältnis Eineinhalb in den beiden größeren Termen vorhanden, nämlich in der 6 zur 4.

Das Intervall Diapason <die Oktave>, das eine Zusammenstellung der beiden Vorhergenannten darstellt <Quinte + Quarte = Oktave> und im doppelten Verhältnis an den Außengliedern zu sehen ist, nämlich in der 6 zur 3, <ist auch vorhanden>. Weiterhin ist auch der Unterschied von 6 zu 4 verglichen mit dem <Unterschied> von 4 zu 3 in gleicher Weise im doppelten Verhältnis vorhanden entsprechend dem Diapason-Zusammenklang.

Und auch das Produkt der beiden miteinander **[109]** multiplizierten Außenglieder, die Zahl 18 <3 · 6 = 18> im Verhältnis zum Mittelterm mit sich selbst malgenommen, der Zahl 16 <4 mal 4 = 16; also nun das Verhältnis 18 : 16>, das im Verhältnis Eineinachtel steht, umfasst das Intervall eines Tones <9 : 8>. In den ursprünglichen Termen 3, 4, 6 war es nämlich nicht möglich, dass das Verhältnis dieses Intervalls aufschien, weil keine dieser Zahlen Anteil an einem Achtel-Bruch hat, dem entsprechend dann eine andere <Zahl> Eineinachtel von ihr bilden könnte.

Wiederum ist die Potenz der größten Zahl dreifach <36 als Produkt von 6 · 6>, und das dreifache Verhältnis umfasst den Zusammenklang Diapason zugleich mit dem Zusammenklang Diapente, und das Produkt des größten Gliedes mit sich multipliziert <6 · 6 = 36> im Verhältnis zum Quadrat des kleinsten Wertes <3 · 3 = 9> wird das vierfache Verhältnis haben <36 = 4 · 9>, und dieses umfasst den Zweimal – Diapason- Zusammenklang <Doppeloktave>.

Wiederum aber, von einem anderen Ansatzpunkt aus begonnen, ist das Produkt des kleinsten <Terms> mit dem mittleren <Term> 12 <denn 3 · 4 = 12>, das Produkt aber desselben <kleinsten Terms> mit dem größten 18 <denn 3 · 6 = 18>, und das Produkt des Mittelterms mit dem größten <Term> 24 <denn 4· 6 = 24>. Das Produkt selbst aber von drei mit sich selbst ist 9, von 4 mit sich selbst ist es 16, und bei 6 ist es 36.

Und es steht im Verhältnis Eineindrittel, das das Diatessaron<-Intervall umfasst, nämlich die <Intervalle> 24 zu 18 und ebenso die Zahl 12 zu 9. Im Verhältnis Eineinhalb aber (dem Verhältnis Diapente) stehen sowohl die <Zahl> 18 zu 12 wie auch die <Zahl> 24 zu 16 und die Zahl <36> zu 24; im Verhältnis des Dreifachen aber (damit Diapason und Diapente zusammentreten) steht die Zahl 36 zu 12, im Verhältnis des Vierfachen aber (damit zweimal Diapason <die Doppeloktave> herauskommt), steht die Zahl 36 zu 9, im Verhältnis Eineinachtel aber (im Verhältnis des Tonabstandes) stehen die Zahlen 18 und 16, wie vorhin dargelegt wurde.

καὶ ἡ ἑτέρα δὲ πυθμενικὴ μεσότης ἡ β′ γ′ ϛ′ αὐτόθεν μὲν ἔχει τὸν τριπλάσιον λόγον ἔν τε τοῖς ἄκροις πρὸς ἀλλήλους καὶ τὰς διαφορὰς πάλιν πρὸς ἀλλήλας, ἐν ᾧ λόγῳ ἐστὶν ἡ **[110]** διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε μικτὴ συμφωνία, ὅπερ οὐχ ὑπῆρχε τῇ προτέρᾳ μεσότητι γ′ δ′ ϛ′.

εἰ δὲ καὶ πολλαπλασιάσαιμεν τούς τε ὅρους καθ' ἑαυτοὺς καὶ ἐπ' ἀλλήλους καὶ διαφορὰς καθ' ἑαυτὰς καὶ ἐπὶ τοὺς ὅρους καὶ ἔτι ἐπ' ἀλλήλας, φύσονται ἡμῖν πλείους συμφωνιῶν λόγοι, ὡς ἔνεστί τινα δι' ἑαυτοῦ φιλοκαλήσαντα κατανοῆσαι. προσαρμοσθείη δ' ἂν κἀπὶ ταύτης τῆς μεσότητος οἰκείως τὸ Πλατωνικόν· ἁρμονική γάρ ἐστιν ἡ μεσότης ἡ ʻταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσά τε καὶ ὑπερεχομένηʼ,[27] ὅπερ ἄλλη οὐ συμβέβηκεν· ἐπί τε γὰρ τῆς β′ γ′ ϛ′ [τῷ αὐτῷ μέρει] ὁ μέσος ὅρος τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων, τουτέστιν ἡμίσει, ὑπερέχει τε καὶ ὑπερέχεται·

ὑπερέχει μὲν τοῦ ἐλάττονος, ὑπερέχεται δὲ ὑπὸ τοῦ μείζονος· ἐπί τε τῆς γ′ δ′ ϛ′ πάλιν ὁ μέσος ὅρος τῷ αὐτῷ μέρει τρίτῳ, τῶν ἄκρων ὑπερέχει μὲν τοῦ γ′, ὑπερέχεται δὲ ὑπὸ τοῦ ϛ′· μονάδι γὰρ καὶ δυάδι.

ὑπεναντία δὲ τῇ ἀριθμητικῇ μεσότητι αὕτη ἐνομίσθη ὑπὸ τῶν περὶ Πυθαγόραν, διότι ἐκείνη τὸν μέσον ὑπερεχόμενόν τε καὶ ὑπερέχοντα εἶχεν ἰδίῳ αύτοῦ μέρει οὐκέτι τῶν ἄκρων καὶ τῷ αὐτῷ· ἴσῳ γὰρ ὑπερέχει καὶ ὑπερέχεται ἀριθμῷ ἢ μονάδι, ἐπὶ δὲ τῆς ἁρμονικῆς οὐκ ἴσῳ.

ἐπεὶ δὲ βούλονταί τινες ὑπεναντίαν ἀμφοτέραις ἀριθμητικῇ τε καὶ γεωμετρικῇ ταύτην ἐκδέχεσθαι, ἔφαμεν δὲ ἡμεῖς τῇ ἀριθμητικῇ μόνῃ ὑπεναντίον τι πάσχειν, συλλήψεται ἡμῖν κἀκεῖνο· ἐφέξει γὰρ τὸ μικτόν τι παθοῦσαν φαίνεσθαι τὴν γεωμετρικὴν καὶ μεσότητος λόγον ἔχειν πρός τε ἀριθμητικὴν καὶ ἁρ**[111]**μονικὴν ὡς ἀεὶ ἀκρότητα· τὰ γὰρ ἑκατέρας ἰδιώματα ἐφ' ἑαυτῆς ἀναμίξει.

[27] Platon, Timaios 36 A

Und das andere grundlegende Mittel, die Reihe <2, 3, 6>, enthält schon gleich das Verhältnis des Dreifachen im Verhältnis der Außenglieder zueinander und wiederum die Unterschiede zueinander, ein Verhältnis, in dem die **[110]** Harmonie Diapason und Diapente gemischt vorhanden ist, was in dem vorhergehenden Mittel 3, 4, 6 nicht vorhanden war.

Wenn wir aber auch noch die Terme mit sich selbst und miteinander multiplizieren, ebenso die Abstände mit sich selbst und mit den einzelnen Termen und auch noch die Abstände miteinander, dann werden sich uns noch mehr harmonische Verhältnisse ergeben, die jemand im schönen Selbststudium erkennen kann. Man könnte nun auch zu diesem Mittel passend das platonische Zitat anfügen; bei ihm ist nämlich das harmonische Mittel das "um denselben Teil der äußersten Glieder Übertreffende und Übertroffene", was ja sonst nicht eintraf; denn in der Reihe 2, 3, 6 übertrifft der mittlere Term die Außenglieder um denselben Teil (nämlich um die Hälfte) und wird übertroffen < 3 ist um 1 größer als 2, das heißt die Hälfte von 2; 3 ist um die Hälfte von 6 kleiner als 6>;

der Mittelwert ist größer als der kleinere und ist kleiner als der größere. Und in der Reihe 3, 4, 6 ist wiederum der mittlere Wert um denselben Teil (nämlich um ein Drittel) größer als der kleinere, übertrifft von den Außengliedern die 3 und wird von der Zahl 6 übertroffen, nämlich um eins und zwei.

Das <harmonische Mittel> wurde als entgegengesetzt zum arithmetischen Mittel von der Pythagoras-Schule beurteilt, weil das arithmetische Mittel das Mittelglied als übertroffen und übertreffend um einen ihrer eigenen Bruchteile hatte, und zwar nicht mehr um solche von Außengliedern und um denselben Betrag; denn sie übertrifft und wird übertroffen durch die gleiche Zahl oder die Eins, während es sich bei dem harmonischen <Mittel> nicht um einen gleichen Abstand handelt.

Weil aber manche das <harmonische Mittel> entgegengesetzt gegenüber den beiden anderen Mitteln, dem arithmetischen und geometrischen, auffassen wollen, wir selbst jedoch behaupteten, es stehe nur in einem gewissen Gegensatz zum arithmetischen Mittel, müssen wir auch jene Frage in Angriff nehmen. Es wird nämlich geschehen, dass das geometrische Mittel anscheinend eine Art von Mischung erfährt und ein Verhältnis des Mittels gegenüber dem arithmetischen und harmonischen **[111]** Mittel einnimmt, die immer eine Außenposition bilden; wird sie doch die besonderen Eigenheiten beider in sich vermischen.

ἦν μὲν γὰρ τῆς ἁρμονικῆς ἴδιον τὸ τὸν μέσον ὅρον ὑπερέχειν τε καὶ ὑπερέχεσθαι μέρει αὐτῶν τῶν ἄκρων ποιότητι τῷ αὐτῷ, εἰ καὶ μὴ ποσότητι, οὐδέποτε δὲ τοῦ μέσου· τῆς δὲ ἀριθμητικῆς ἀνάπαλιν οὐκέτι τῶν ἄκρων, ἀλλὰ τοῦ μέσου καὶ ποσότητι τῷ αὐτῷ.

ἐπὶ δὲ τῆς γεωμετρικῆς ὁ μέσος ὅρος ᾧ ὑπερέχει καὶ ὑπερέχεται μέρει, ἐκεῖνο οὔτε μόνων τῶν ἄκρων ἐστὶν οὔτε μόνου τοῦ μέσου,

ἀλλὰ καὶ μέσου καὶ ἄκρων· τοῦ μὲν γὰρ ἑτέρου τῶν ἄκρων ὑπερέξει αὑτοῦ μέρει, ὑπερσχεθήσεται δὲ ὑπὸ θατέρου τοῦ ἐκείνου μέρει· τὸ δὲ αὐτὸ ἔσται ποιότητι, εἰ καὶ μὴ ποσότητι τὸ μέρος, ὡς ἐπὶ τῆς ἁρμονικῆς.

πολλάκις δὲ καὶ πλείοσι μέρεσιν ὑπερέξει τε καὶ ὑπερσχεθήσεται, ἐπὶ ποιότητι πάλιν τοῖς αὐτοῖς, ὥστε καὶ κοινόν τι ἕξει πρὸς τὴν ἁρμονικὴν τὸ μόνον ποιότητι ταὐτὸν εἶναι τὸ μέρος, μηκέτι δὲ ποσότητι, καὶ κατὰ τοῦτο οὐκ ἔσται αὐτῇ ὑπεναντία ἡ ἁρμονική.

πάλιν ἐν μὲν τῇ ἀριθμητικῇ κατὰ μὲν τοὺς μείζονας ὅρους οἱ ἐλάττονες λόγοι ἐφαίνοντο, κατὰ δὲ τοὺς ἐλάττονας οἱ μείζονες ἐν δὲ τῇ ἁρμονικῇ ὑπεναντίως μείζονες μὲν ἐν τοῖς μείζοσιν, ἐλάττονες δὲ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν, ἐν δὲ τῇ γεωμετρικῇ ὡσανεὶ μέση αὐτῶν οὔσῃ οὔτε ἐλάττονες οὔτε μείζονες, ἀλλ' ἴσοι.

διὰ δὴ ταῦτα εὐλόγως ἂν μόνῃ τῇ ἀριθμητικῇ ὑπεναντία ἡ ἁρμονικὴ λέγοιτο, οὐκέτι δὲ καὶ τῇ γεωμετρικῇ. ἴδιον δὲ ἔχει ἡ ἁρμονικὴ τὸ ὑπὸ μέσου καὶ συνάμφω τῶν ἄκρων εἶναι διπλάσιον τοῦ ὑπὸ μόνων τῶν ἄκρων γινομένου. γεν**[112]**νᾶται δὲ προστάγμασι τούτοις πάλιν ἀπὸ ἰσότητος πρῶτον ἐκ μονάδων <εἶτα δυάδων> εἶτα τριάδων καὶ ἐφεξῆς· πρῶτον ἐκ πρώτου καὶ δευτέρου, δεύτερον δὲ ἐκ πρώτου δύο δευτέρων, τρίτον δὲ ἐκ πρώτου δὶς δευτέρου τρὶς τρίτου, ἵνα γένηται ἡ τὰ ἄκρα καὶ τὰς διαφορὰς ἐν τριπλασίῳ λόγῳ ἔχουσα.

Es war ja die Besonderheit des harmonischen Mittels, dass der mittlere Term übertraf und übertroffen wurde um den qualitativ, wenn auch nicht quantitativ gleichen Teil der beiden Außenglieder, niemals aber durch den des Mittelterms; an dem arithmetischen Mittel hinwieder bestand die Eigenheit, dass die mittlere Größe nicht mehr größer oder kleiner war als ein Teil der Außenglieder, sondern um einen Teil des Mittelterms, der quantitativ der gleiche war.

Bei dem geometrischen Mittel aber gehört der Teil, um den der mittlere Term übertrifft und übertroffen wird, weder den Außengliedern allein noch dem Mittelterm allein, sondern gehört sowohl dem Mittelterm wie den Außentermen. Denn der Mittelterm wird den einen der Außenterme um einen Teil von sich übertreffen, wird aber vom anderen Außenterm um den <qualitativen> Teil von jenem übertroffen <z. B. 4 : 6 = 6 : 9>. Es wird aber qualitativ derselbe Teil sein, wenn auch nicht quantitativ, wie bei dem harmonischen Mittel.

Oft wird der Mittelterm aber auch um mehrere Teile übertreffen und übertroffen werden, die qualitativ wieder dieselben sein werden, so dass das geometrische Mittel auch eine gewisse Gemeinsamkeit mit dem harmonischen Mittel hat, nämlich, dass der Teil nur qualitativ derselbe ist, niemals aber quantitativ, und insofern wird das harmonische Mittel dem geometrischen nicht subkonträr sein.

Wiederum erschienen in dem arithmetischen Mittel die kleineren Verhältnisse entsprechend den größeren Termen und die größeren entsprechend den kleineren, während bei dem harmonischen Mittel umgekehrt die größeren Verhältnisse in den größeren Termen, die kleineren Verhältnisse aber in den kleineren Termen erschienen. In dem geometrischen Mittel aber, das sozusagen eine Mittelstellung zwischen beiden einnimmt, sind die Verhältnisse weder größer noch kleiner, sondern gleich.

Deshalb wird man mit gutem Grund das harmonische Mittel nur gegenüber dem arithmetischen als subkonträr bezeichnen, nicht mehr jedoch gegenüber dem geometrischen. Die Besonderheit des harmonischen Mittels besteht aber darin, dass das Produkt des Mittelterms und der beiden Außenterme doppelt so groß ist wie das Produkt der beiden Außenterme allein. Sie entsteht **[112]** nach diesen Vorschriften wiederum aufgrund der Gleichheit zuerst aus Einsen, <dann aus Zweiheiten>, dann aus Dreiheiten und so weiter, das erste aus dem ersten und zweiten, das zweite aus dem ersten mal die zwei zweiten, das dritte aus dem ersten, zweimal dem zweiten und dreimal dem dritten, damit auch ein Mittel entsteht, das die Außenglieder und die Unterschiede im dreifachen Verhältnis enthält <2 , 3, 6>.

εἰ δὲ ᾗ ἐν διπλασίῳ, πρῶτον ἐκ πρώτου καὶ δὶς δευτέρου, δεύτερον δ' ἐκ δὶς πρώτου καὶ δὶς δευτέρου, τρίτον δὲ ἐξ ἅπαξ πρώτου δὶς δευτέρου τρὶς τρίτου. ἀπὸ μὲν γὰρ ἰσότητος ἐν μονάσιν ἔσονται κατὰ τὰ εἰρημένα προστάγματα αἱ πυθμενικαὶ δύο μεσότητες ἡ β′ γ′ ς′ καὶ ἡ γ′ δ′ ς′·

ἀπὸ δὲ τῆς ἐν δυάσιν <αἱ διπλάσιαι καὶ ἀπὸ τῆς ἐν τριάσιν> αἱ τριπλάσιαι καὶ ἐφεξῆς. ἀπὸ πασῶν δὲ τῶν γινομένων πλάσεων τὰ ἰδιώματα τῆς ἁρμονικῆς παρακολουθήσει.

Καθάπερ δὲ ἐπὶ τοῦ κανόνος τῶν ἐξάψεων μενουσῶν ὁ ὑπαγωγεὺς μεθιστάμενος ποικίλας συμφωνίας ἀποτελεῖ, τὸν αὐτὸν τρόπον δυνατόν ἐστι, δύο ὅρων δοθέντων εἴτε ἀρτίων εἴτε καὶ περισσῶν καὶ τῶν αὐτῶν διαμενόντων, ἄλλην καὶ ἄλλην μεσότητα νῦν μὲν ἀριθμητικὴν ἀποτελεῖν νῦν δὲ γεωμετρικὴν νῦν δὲ τὴν τῇ ἀριθμητικῇ ὑπεναντίαν, τουτέστιν ἁρμονικήν·

ἰδοὺ γὰρ ἐν μὲν ἀρτίοις ὅροις τῷ τε μ′ καὶ τῷ ι′ ὁ μὲν κε′ ὅρος μεσότης γενόμενος ἀριθμητικὴν ἀποτελεῖ, ᾗ καὶ τὰ ἰδιώματα πάντα παρακολουθήσει, ὁ δὲ κ′ γεωμετρικὴν σὺν τοῖς ἰδιώμασιν αὐτῆς, ὁ δὲ ις′ ἁρμονικὴν μετὰ τῶν προσηκόντων συμπτω**[113]**μάτων.

ἐν δὲ περισσοῖς ὅροις τῷ τε με′ καὶ τῷ ε′ ὁ αὐτὸς κε′ μεσεμβοληθεὶς ὁμοίως ποιήσει τὴν ἀριθμητικήν· αἴτιον δ' ὅτι οἷον προσέλαβεν ὁ μείζων πρὸς <τὸν μέσον>, τοσούτων ἀφηρέθη ὁ ἐλάττων, ὥστε κατ' ἴσην πάλιν ὑπεροχὴν τὸν μέσον ὑπερέχειν τε καὶ ὑπερέχεσθαι· τοῦτο γὰρ ἦν ἀριθμητικῆς ἴδιον.

ὁ δὲ ιε′ μεσεμβοληθεὶς γεωμετρικὴν ποιήσει, ὁ δὲ θ′ τὴν ἁρμονικήν. ἐλάττονας δὲ ἀριθμοὺς τῶν ἐκκειμένων ἄκρων κατά τε τὸ περισσὸν εἶδος καὶ τὸ ἄρτιον περιεκτικοὺς τῶν τριῶν μεσοτήτων οὐκ ἄν τις εὕροι, ἀλλ' οὗτοι ἂν εἶεν οἱ πυθμενικοὶ καὶ ἐλάχιστοι.

Ist das Verhältnis aber doppelt, entsteht der erste Term aus dem ersten und zweimal dem zweiten, der zweite aber aus zweimal dem ersten und zweimal dem zweiten, der dritte aber aus einmal dem ersten, zweimal dem zweiten und dreimal dem dritten <3, 4, 6>. Von der Gleichheit nämlich ausgehend werden entsprechend den genannten Vorschriften die beiden Grundformen dieses Mittels in Einerzahlen die Reihen 2, 3, 6 und 3, 4, 6 sein.

Geht man von dem Mittel in der Zweiheit aus, <werden es die doppelten Werte sein, 4, 6, 12 und 6, 8, 12, und beim dreifachen Verhältnis> sind es die dreifachen Zahlen <6, 9, 18 und 9, 12, 18> und so fort. Bei allen den entstehenden Bildungen werden sich aber die Besonderheiten des harmonischen Mittels als Folge zeigen.

Wie aber bei einem Monochord, wenn die Befestigungen <der Saite> unverändert bleiben, der Saitensteg, wenn er verschoben wird, verschiedene Zusammenklänge erzeugt, ist es auf dieselbe Art und Weise möglich, wenn zwei Terme gegeben sind (gleich ob gerade oder ungerade) und diese unverändert bleiben, immer wieder ein anderes Mittel zu erzeugen, und zwar jetzt ein arithmetisches, nun ein geometrisches und nun das dem arithmetischen subkonträre, das heißt das harmonische.

Man sehe nämlich: Bei den geraden Termen 40 und 10 wird der Term 25, wenn er der Mittelterm wird, ein arithmetisches Mittel erzeugen, das folglich auch alle Besonderheiten desselben besitzen wird; die Zahl 20 aber <als Mittelgröße> wird ein geometrisches Mittel hervorbringen mit allen seinen Besonderheiten; die Zahl 16 aber erzeugt das harmonische Mittel mit den dazugehörigen Erscheinungen. **[113]**

Sind die Terme aber ungerade, nämlich die Zahlen 45 und 5, und wird der gleiche Term 25 in die Mitte davon gestellt, wird er in gleicher Weise das arithmetische Mittel herstellen. Der Grund dafür liegt darin, dass im gleichen Verhältnis, wie der größere Term gegenüber <dem mittleren> zunahm <45 - 25 = 20>, der kleinere Term vermindert wurde <25 - 20 = 5>, so dass wiederum der Mittelterm um den gleichen Überschuss übertrifft und übertroffen wird, und dies war ja die Eigenheit des arithmetischen Mittels.

Stellt man jedoch <den Term> 15 in die Mitte, wird er das Mittel geometrisch machen <5 : 15 : 45>, die Zahl 9 aber wird ein harmonisches Mittel erzeugen <5 : 9 : 45>. Kleinere Zahlen aber als die angesetzten Außenterme (sowohl in der ungeraden wie in der geraden Art), die zugleich alle drei Mittel umfassen, wird man nicht finden können, sondern diese werden die ursprünglichen und kleinsten sein.

Καὶ αἵδε μὲν αἱ τρεῖς μεσότητες πρὸς τῶν παλαιῶν μόναι λόγου ἠξιοῦντο, διαφοραῖς χρώμεναι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἰδιότησι καθ' αὑτὰς ταῖς εἰρημέναις, ἐφηρμόζοντο δὲ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῇ κοσμικῇ συστάσει καὶ ἁρμονίᾳ, ὡς ἐν ἄλλοις δείξομεν.

αἱ δὲ ἐπὶ ταύταις τρεῖς ἀπ' Ἀρχύτου καὶ Ἱππάσου παραδοχῆς καὶ αὐταὶ ἠξιώθησαν, ὧν ἡ πρώτη, τετάρτη δὲ συναριθμουμένη τῶν ἐξ ἀρχῆς τριῶν, ἰδίως ὑπεναντία ὡς ἔφαμεν κέκληται, διὰ τὸ ὑπεναντίον τι πάσχειν τῇ ἁρμονικῇ διὰ τοὺς ἐνοφθέντας αὐτῇ τῶν συμφωνιῶν λόγους.

ἔστι δ' οὖν ἡ τετάρτη μεσότης τοιαύτη· τριῶν ὅρων ὡς ἔχει ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάττονα, οὕτως ἕξει ἡ τῶν ἐλαττόνων ὅρων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν μειζόνων. ὑπεναντία δὲ τῇ ἁρμονικῇ εἴρηται, διότι ἐν ἐκείνῃ ἡ τῶν μειζόνων ὅρων διαφορὰ πρόλογος ἦν, ἐπὶ δὲ ταύτης ἡ τῶν ἐλαττόνων.

τοὺς δὲ ἄκρους τοὺς **[114]** αὐτοὺς διατηροῦσιν ἀμφότεραι κατά τε τὰς πυθμενικὰς καὶ τὰς τούτων πολλαπλασίους. ὑποδείγματα δὲ ταύτης ἔσται β′ ε′ ϛ′, γ′ ε′ ϛ′, ἴδιον δὲ τὸ πολλαπλάσιον ἀποτελεῖν τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων ὅρων τοῦ ὑπὸ τῶν ἐλαττόνων.

οὔτε δὲ τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὁ μέσος ὅρος ὑπερέξει τε καὶ ὑπερσχεθήσεται ὡς ἐπὶ τῆς ἁρμονικῆς, οὔτε τῷ ἑαυτοῦ μέρει ὡς ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς, οὔτε ἅμα τῷ τε ἑαυτοῦ καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων ὡς ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς, ἀλλ' ἔσται τις ἰδιότης κατὰ τὴν ὑπεροχὴν ἑαυτῆς.

γεννᾶται δὲ καὶ αὕτη ἐξ ἰσότητος, πρώτως τῆς ἐν μονάσιν εἶτ' ἐν δυάσι καὶ τριάσιν καὶ ἑξῆς ἀκολούθως· πρῶτον ἐκ πρώτου καὶ δευτέρου, δεύτερον δὲ <ἐκ> πρώτου δύο δευτέρων δύο τρίτων, τρίτον δὲ ἐξ ἅπαξ πρώτου δὶς δευτέρου τρὶς τρίτου, καὶ φύσεται ἡ ἐν τριπλασίῳ λόγῳ τοὺς ἄκρους ἔχουσα.

Viertes bis sechstes Mittel

Und nur diese drei Mittel wurden von den Alten für erwähnenswert gehalten, da sie untereinander Unterschiede und die angeführten Besonderheiten jede für sich aufweisen. Diese Mittel aber wurden von den Alten auch mit dem kosmischen Bau und dessen Harmonie in Verbindung gebracht, wie wir an anderer Stelle darlegen werden.

Die ihnen folgenden drei <Mittel> wurden aber von Archytas und Hippasos auch ihrerseits der Aufnahme für würdig gehalten. Von ihnen das erste, in Wirklichkeit das vierte, wenn man sie zu den anfänglichen drei Formen hinzuzählt, wird eigentlich "umgekehrt" <subkonträr> genannt, wie wir sagten, da es ihm in etwa gegensätzlich ergeht wie dem harmonischen Mittel, weil man in ihm die Verhältnisse der Zusammenklänge erblickt.

Das vierte Mittel ist nun von folgender Art: Wie sich von ihren drei Termen der größere zum kleineren verhält, ebenso wird sich auch die Differenz der kleineren Termen zu der der größeren verhalten <3, 5, 6; 6 : 3 = 5 – 3 : 6 – 5>. Subkonträr zum harmonischen <Mittel> ist es aber deswegen genannt, weil in jenem die Differenz der größeren Terme das Vorderglied war, in dieser jedoch die Differenz der kleineren <Terme>.

Die Außengrößen **[114]** selbst aber behalten beide Mittel entsprechend den Grundformen, ebenso auch deren Vielfache. Beispiele für dieses <Mittel> werden 2, 5, 6; 3, 5, 6 sein; seine Eigenheit aber besteht darin, dass das Produkt der größeren Terme das Mehrfache des Produkts der kleineren bildet.

Es wird auch nicht der Mittelterm um den gleichen Teil die beiden Außenglieder übertreffen und von ihnen übertroffen werden, wie es bei dem harmonischen Mittel ist, und wird auch nicht um einen Teil von sich selbst <übertreffen und übertroffen werden> wie bei dem arithmetischen <Mittel> und auch nicht zugleich um einen Teil von sich und des einen der beiden Außenterme wie bei dem geometrischen Mittel, sondern eine Eigenheit von ihm wird gemäß dem Überschuss seiner selbst bestehen.

Aber auch dies entsteht aus der Gleichheit, zuerst in den Einsen, dann in den Zweien, den Dreien und so weiter in Folge; das erste entsteht aus <der Summe des> ersten und zweiten, das zweite <aus> dem ersten, zweimal den zweiten und dreimal dem dritten Glied und das dritte aus einmal dem ersten, zweimal dem zweiten und dreimal dem dritten, und so entsteht das Mittel, das seine Außenglieder im dreifachen Verhältnis haben wird.

ἵνα δὲ ἡ ἐν διπλασίῳ ἔχουσα γένηται, ποιητέον πρῶτον ἐκ πρώτου δύο δευτέρων, δεύτερον δὲ ἐκ πρώτου δύο δευτέρων δύο τρίτων, τρίτον δὲ ἐξ ἅπαξ πρώτου δὶς δευτέρου τρὶς τρίτου.

αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι πρωτότυποι φύσονται ἐκ τῆς ἀπὸ μονάδων ἰσότητος, αἱ δὲ τούτων διπλάσιαι ἐκ τῆς ἀπὸ δυάδων καὶ τριπλάσιαι ἐκ τῆς ἀπὸ τριάδων καὶ ἑξῆς ἀκολούθως.

ἡ δὲ πέμπτη ὑπεναντίον μέν τι καὶ αὕτη πάσχει τῇ γεωμετρικῇ, ἁπλῶς δὲ πέμπτη εἴρηται διὰ τὸ προειλῆφθαι τῷ ὀνόματι τὴν πρὸ αὐτῆς. ἔστι δ' οὖν τριῶν ὅρων ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ αὐτῶν τούτων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν μειζόνων, οἷον β′ δ′ ε′.

ὑπηναντίωται δὲ τῇ γεωμετρικῇ, διότι ἐπὶ μὲν ἐκείνης ἦν ἡ τῶν **[115]** μειζόνων ὅρων διαφορὰ πολλαπλασία τῆς τῶν ἐλασσόνων, ἐπὶ δὲ ταύτης ἀνάπαλιν ἡ τῶν ἐλασσόνων τῆς τῶν μειζόνων, ἐν μέντοι τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐν ᾧ καὶ οἱ λεχθέντες ὅροι.

ἴδιον δ' ἔχει τὸ διπλάσιον ἀποτελεῖν τὸ ἀπὸ τοῦ μέσου τοῦ ὑπ' ἐλαχίστου καὶ μέσου, καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων ὅρων τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων. καὶ ταύτης δὲ αἱ πολλαπλάσιαι τὰ αὐτὰ ἕξουσι παρακολουθήματα.

γεννᾶται δὲ ἐκ τριῶν ἴσων ὅρων, πρῶτος ὅρος ἐκ πρώτου καὶ δευτέρου, μέσος ἐκ δύο πρώτων δύο δευτέρων, μείζων ἐκ τοῦ πρώτου δύο δευτέρων δύο τρίτων.

ἡ δὲ ἕκτη, ὅταν ὡς ὁ μέγιστος τῶν τριῶν ὅρων πρὸς τὸν μέσον ἔχῃ, οὕτως καὶ ἡ τῶν ἐλαττόνων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν μειζόνων. διὰ ταὐτὰ δέ, δι' ἅπερ καὶ ἡ πρὸ αὐτῆς, τῇ γεωμετρικῇ ἠναντίωται, οἷον α′ δ′ ς′.

Damit aber das Mittel im zweifachen Verhältnis <der Außenglieder> entsteht, muss man das erste Glied aus dem ersten und zweimal den zweiten herstellen, das zweite aus dem ersten, zweimal den zweiten und zweimal den dritten, das dritte Glied aber aus einmal dem ersten, zweimal dem zweiten und dreimal dem dritten.

Die genannten Grundformen <2, 5, 6 und 3, 5, 6> werden nun aus der Gleichheit von den Einsen her entstehen, deren verdoppelte Formen aber aus der Gleichheit von den Zweien her, die dreifachen Formen aus der Gleichheit von den dreien her und so weiter in Folge.

Bei dem fünften Mittel aber geschieht wiederum etwas dem geometrischen Mittel Entgegengesetztes; es wird aber einfach "fünftes" genannt, weil das Mittel vor ihm <das vierte> seinen Namen zuerst bekam. Es verhält sich nun bei seinen drei Termen so wie der mittlere zum kleinsten ebenso ihre Differenz zur Differenz der größeren <Terme>, wie zum Beispiel bei 2, 4, 5 <4 : 2 = 2 : 1>.

Es liegt aber ein subkonträrer Gegensatz zum geometrischen Mittel vor, insofern bei diesem **[115]** die Differenz der größeren Terme das Vielfache der <Differenz> der kleineren <Terme> bildete, während wiederum bei diesem <dem fünften Mittel> die Differenz der kleineren Terme <das Vielfache> der >Differenz> der größeren <Terme> bildete, und zwar im gleichen Verhältnis, in dem sich auch die genannten Terme befinden.

Seine Eigenart besteht aber darin, dass das <Produkt> des Mittelgliedes mit sich selbst das Doppelte des <Produktes> des kleinsten <Terms> mit dem Mittel<term> bildet; weiterhin: Dass das <Produkt> der größeren Terme <das Doppelte bildet> des <Produktes> der beiden Außenterme, und auch die Vielfachen dieses Mittels werden dieselben Folgeerscheinungen aufweisen.

Das <fünfte Mittel> entsteht aber aus drei gleichen Termen <1, 1, 1>, wobei der erste aus dem ersten und zweiten <1 + 1 = 2>, der mittlere aus zweimal den ersten <und> zweimal den zweiten entsteht <2 · 1 + 2 · 1 = 4> <und> der größere aus dem ersten, zweimal dem zweiten und zweimal dem dritten <1 + 2 · 1 + 2 · 1 = 5>.

Das sechste Mittel aber entsteht, wenn sich so, wie sich der größte der drei Terme zum mittleren verhält, ebenso auch die Differenz der beiden kleineren <Terme> zur <Differenz> der größeren verhält. Aus diesem Grund aber ist dieses Mittel, wie auch die vor ihr, dem geometrischen entgegengesetzt, zum Beispiel die Reihe 1, 4, 6.

κἀνταῦθα δὲ πρόλογός ἐστιν ἡ τῶν ἐλαττόνων ὅρων διαφορά, τῆς γεωμετρικῆς πρόλογον ἐχούσης τὴν τῶν μειζόνων ὅρων πρὸς ἀλλήλους, καὶ συνάμφω τῶν διαφορῶν πρὸς ἀλλήλας ἡμιόλιοί εἰσι.

τοιοῦτοι γενήσονται καὶ οἱ τὸ ἴδιον <ταύτης> τῆς μεσότητος ἀποδιδόντες λόγοι. τὸ γὰρ ἀπὸ τοῦ μεγίστου ϛʹ ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν μειζόνων ὅρων, καὶ αὐτὸ τοῦτο <τὸ> ἀπὸ τοῦ μέσου καὶ αὕτη δ' ἂν γεννηθείη ἐκ τριῶν ἐν ἰσότητι ὅρων οὕτως· πρῶτος πρώτῳ ἴσος, δεύτερος δυσὶ πρώτοις δυσὶ δευτέροις, τρίτος ἐξ ἅπαξ πρώτου δὶς δευτέρου τρὶς τρίτου. ἡ μὲν οὖν πρωτότυπος ἀπὸ μονάδων ἐστίν, αἱ δὲ ταύτης πολλαπλάσιαι ἀπὸ δυάδων καὶ τριάδων καὶ τῶν ἑξῆς ἰσοτήτων.

[116] Εἴρηται καὶ περὶ τῶν ἑξῆς ταῖς πρώταις τριῶν μεσοτήτων, αἷς καὶ οἱ ἀπὸ Πλάτωνος μέχρις Ἐρατοσθένους ἐχρήσαντο, ἄρξαντος ὡς ἔφαμεν τῆς εὑρέσεως αὐτῶν Ἀρχύτα καὶ Ἱππάσου τῶν μαθηματικῶν.

τὰς δ' ὑπὸ τῶν μετὰ ταῦτα νεωτέρων περί τε Μυωνίδην καὶ Εὐφράνορα τοὺς Πυθαγορικοὺς προσφιλοτεχνηθείσας τέσσαρας οὔτε παραλείπειν ἄξιον·[28] ἀφιλόκαλον γὰρ τὸ τοιοῦτον· οὔτε μὴν ἐπεκτείνειν τὸν περὶ αὐτῶν λόγον, διὰ τὸ μηδὲν οὕτω σεμνὸν αὐτὰς ἔχειν μηδὲ ποικίλον, ὡς τὰς πρὸ αὐτῶν. διόπερ ἐν ἐπιδρομῇ ῥητέον περὶ αὐτῶν στοχαζομένους ἅμα καὶ τῆς τοῦ βιβλίου συμμετρίας.

ὠνομάσαμεν δ' αὐτὰς ἁπλῶς οὕτως· ἑβδόμην καὶ ὀγδόην καὶ ἐνάτην καὶ δεκάτην. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ἑβδόμη, ὅταν ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔχῃ, οὕτως ἡ αὐτῶν διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων, οἷον ϛʹ ηʹ θʹ.

---

[28] DK 43. 3 Simos. Myonides. Euphranor

Und auch hier ist das Vorderglied die Differenz der beiden kleineren Terme <3>, während das geometrische Mittel als Vorderglied die <Differenz> der größeren Terme zueinander hat, und beide Differenzen zusammen verhalten sich zueinander eineinhalbfach.

Von dieser Art nun werden auch die Verhältnisse sein, die die besondere Eigenart <dieses> Mittels bilden. Denn das <Produkt> der größten <Zahl> 6 mit sich selbst ist das Anderthalbfache des <Produktes> der beiden größeren Terme <6 · 6 = 36; 4 · 6 = 24>, und eben dasselbe Verhältnis wird sich ergeben, wenn man den Mittelwert mit sich selbst multipliziert <4 · 4 = 16; 4 · 6 = 24; 24 : 16 = $1\frac{1}{2}$>, und dieses Mittel wird aus drei Termen im Verhältnis der Gleichheit entstehen <1, 1, 1>, und zwar so: Der erste <Term> ist dem ersten Term gleich, der zweite den beiden ersten und den zwei zweiten, der dritte aber ist gleich einmal der ersten, zweimal der zweiten und dreimal der dritten <1 = 1; 4 = 2 + 2; 6 = 1 + 2 + 3>. Die Grundform nun ist aus Einerzahlen gebildet, deren Vielfache aber aus Zweien, Dreien und den sich anschließenden Gleichheiten. **[116]**

Siebtes bis zehntes Mittel

So haben wir auch über die drei auf die ersten Mittel folgenden Mittel gesprochen, die auch die Nachfolger Platons bis zu Eratosthenes anwandten, wobei, wie wir berichteten, ihre ersten Erfinder die Mathematiker Archytas und Hippasos gewesen sind.

Es wäre aber nun weder recht, die von den nachfolgenden jüngeren Pythagoreern um Myonides und Euphranor hinzugefundenen vier <Formen> wegzulassen, denn ein solches Verfahren entspräche nicht der Liebe zum Schönen, noch die Darstellung darüber breit auszudehnen, weil diese Formen nichts so Großartiges an sich haben und auch nicht so abwechslungsreich sind wie die vor ihnen. Deshalb müssen wir in kurzem Anlauf über sie sprechen, da wir ja zugleich auch auf die Symmetrie unseres Buchumfanges achten.

Wir haben sie aber einfach so genannt: Das siebte und achte und neunte und zehnte Mittel. Und das siebte Mittel liegt vor, wenn, wie sich der größte Term zum kleinsten verhält, ebenso deren Differenz sich zur Differenz der beiden kleineren Terme verhält, wie zum Beispiel 6, 8, 9 <9 : 6 = 3 : 2>;

γένεσις δὲ αὐτῆς ἐκ τῆς τετάρτης γʹ εʹ ϛʹ· τὰ γὰρ ἐκείνης ἄκρα συνθεὶς ταύτης μέγιστον τάσσω, ἐκ δὲ ἐλαχίστου καὶ μέσου τὸν ταύτης ποιῶ μέσον, τὸν δ' ἐκείνης μέγιστον ταύτης ἐλάχιστον. παρακολουθεῖ δὲ ταύτῃ τὸ ἔχειν τὸν αὐτὸν λόγον τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων ὅρων πρόμηκες πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν ἐλαττόνων, ὅνπερ καὶ ὁ μέγιστος ὅρος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔχει, καὶ ἡ τῶν ἄκρων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων. ἡ δὲ ὀγδόη θεωρεῖται, ὅταν ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔχῃ, οὕτως καὶ ἡ αὐτῶν τούτων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ μεγίστου παρὰ **[117]** τὸν μέσον, ἀντιστρόφως τῇ πρὸ αὐτῆς, οἷον ϛʹ ζʹ θʹ. γένεσις δὲ καὶ ταύτης ἐκ τῆς πέμπτης τῆς βʹ δʹ εʹ· συνθεὶς γὰρ τοὺς μεγίστους αὐτῆς ὅρους ποιῶ τὸν ταύτης μέγιστον, τοὺς δ' ἄκρους τὸν ταύτης μέσον τάσσω, τοὺς δὲ ἐλάττονας πάλιν συνθεὶς ἐκείνης ἔχω τὸν ταύτης ἐλάττονα.

παρακολουθεῖ δὲ αὐτῇ τό, ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔχει, οὕτως καὶ τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων ὅρων ἔχειν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ἐλαττόνων.

ἡ δὲ ἐννάτη, ὅταν ὡς ὁ μέσος ὅρος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔχῃ, οὕτως ἡ διαφορὰ τῶν ἄκρων πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων, οἷον δʹ ϛʹ ζʹ.

ἴδιον δὲ ἔχει τὸ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἐν ᾧπερ καὶ μέσος πρὸς ἐλάχιστον, καὶ διαφορὰ δὲ ἄκρων πρὸς διαφορὰν ἐλαττόνων.

γεννήσομεν δὲ καὶ ταύτην ἐκ τῆς ἕκτης αʹ δʹ ϛʹ· συνθεὶς γὰρ αὐτῆς τὰ ἄκρα ποιῶ τὸν ταύτης μέγιστον, μέσον δὲ τάσσω τὸν ἐκείνης μέγιστον, ἐλάχιστον δὲ τὸν μέσον. ἔσονται δὴ τάξει ταῖς ἀπὸ τῆς ἑβδόμης τρισὶ μεσότησιν αἱ γενέσεις ἀπὸ τῶν πρὸ αὐτῶν τριῶν τετάρτης τε καὶ πέμπτης καὶ ἕκτης.

dieses Mittel aber entsteht aus dem vierten, der <Reihe> 3, 5, 6; wenn ich nämlich deren Außenglieder addiere, mache ich daraus den größten Term <9>, aus dem kleinsten und dem mittleren Term davon mache ich den Mittelterm des siebten Mittels <3 + 5 = 8>, und aus dem größten Term des vierten <6> mache ich den kleinsten Term des siebten.) Dadurch ergibt sich die Folge, dass die aus den beiden größeren Termen entstehende längliche Zahl <8 · 9 = 72> dasselbe Verhältnis zum Produkt der beiden kleineren <6 · 8 = 48> hat wie es auch der größte Term zum kleinsten aufweist <72 : 48 = 9 : 6>. Als achtes Mittel wird es aber angesehen, wenn, wie <bei drei Größen> sich der größte Term zum kleinsten verhält, so auch deren Differenz zur Differenz zwischen dem größten und **[117]** dem mittleren Term verhält (gerade umgekehrt wie bei dem Mittel zuvor), nämlich wie 6, 7, 9 <9 : 6 = 3 : 2>. Dieses <8.> Mittel ist aber aus dem fünften entstanden, nämlich der <Reihe> 2, 4, 5. Indem ich nämlich deren größte Terme addiere, gewinne ich den größten Term des achten Mittels <4 + 5 = 9>, und wenn ich die Außenterme des fünften Mittels addiere, gewinne ich einen neuen Mittelterm <2 + 5 = 7>, und indem ich wiederum die kleineren Terme des fünften Mittels addiere, erhalte ich den kleinsten Term des achten Mittels <2 + 4 = 6>.

Auch bei der <achten Form> ergibt sich die Folge, dass so, wie sich der größte Term zum kleinsten verhält, sich auch das <Produkt> der größeren Terme zum <Produkt> der kleineren Terme verhält <9 : 6 = 63 : 42>.

Das neunte Mittel aber <entsteht>, wenn sich, wie sich der Mittelterm zum kleinsten verhält, ebenso die Differenz der Außenterme zur Differenz der kleineren Terme verhält, wie zum Beispiel <in der Reihe> 4, 6, 7.

Dieses Mittel hat aber die Eigenheit, dass das <Produkt> der größeren Terme zum <Produkt> der Außenterme im gleichen Verhältnis steht wie der Mittelterm zum kleinsten und die Differenz der Außenterme zur Differenz der kleineren Terme <42 : 28 = 6 : 4 = 3 : 2>.

Wir werden aber auch diese Form aus dem sechsten < Mittel> erzeugen, <der Reihe> 1, 4, 6. Indem ich nämlich deren Außenterme addiere, gewinne ich den größten Term der neunten <Form; 1 + 6 = 7>; als Mittelwert setze ich den größten Term der sechsten Form <6> und als kleinsten den Mittelterm der sechsten <4>. Es werden aber der Reihe nach die drei Mittel von dem siebten an <also 7., 8., 9.> aus den drei vor ihnen stehenden Mitteln, dem vierten und fünften und sechsten, entstehen.

ἡ δ' ἐπὶ πάσαις δεκάτη ἐστίν, ὅταν ὡς ὁ μέσος ἔχῃ πρὸς τὸν ἐλάσσονα, οὕτως καὶ ἡ <διαφορὰ τῶν ἄκρων πρὸς τὴν διαφορὰν> τοῦ μεγίστου παρὰ τὸν μέσον, οἷον γʹ εʹ ηʹ. ἴδιον δὲ ταύτης τὸ ἐν ἐπιμερεῖ λόγῳ θεωρεῖσθαι καὶ πυθμένειν γε, ἀλλ'—οὐκ ἐν πολλαπλασίῳ ἢ ἐπιμορίῳ. καὶ παρακολουθεῖ αὐτῇ τὸ ὑπὸ τῶν ἐλαττόνων πρό-**[118]**μηκες ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν λεχθεισῶν διαφορῶν ἀποτελεῖν· αἴτιον δ' ὅτι οἱ αὐτοί εἰσιν ἀριθμοί. γεννᾶται δὲ καὶ αὕτη ἐκ τῆς ἁρμονικῆς τῆς βʹ γʹ ϛʹ, ἥτις πρὸ τῶν εἰρημένων ἐστὶ τριῶν μέσων, ἵνα συνεχεῖς ἀπὸ συνεχῶν καὶ εἰ μὴ εὐτάκτων τὴν γένεσιν σχῶσι. συνθεὶς δ' οὖν τοὺς ἄκρους ἐκείνης ποιῶ τὸν ταύτης μέγιστον, ἐκ δὲ τῶν ἐλασσόνων τὸν μέσον ταύτης τάσσω, τὸν δὲ μέσον ἐφ' ἑαυτοῦ ἐλάχιστον ταύτης φυλάσσω.

δέκα δὴ τῶν πασῶν ἡμῖν ἀναφανεισῶν μεσοτήτων, οὐ τὸ τυχὸν ἐγκώμιον ἔσται τῆς δεκάδος καὶ τοῦτο πρὸς τὸ μηδένα τέλειον λόγον ἐκφυγεῖν αὐτήν, ἀλλ' ὡσανεὶ δεχάδα τινὰ οὖσαν τοὺς τῶν ὄντων ἁπάντων λόγους εἰς ἑαυτὴν ἀναδέχεσθαι, καὶ διὰ τοῦτο πᾶν καὶ ὅλον καὶ οὐρανὸν πρὸς τῶν παλαιῶν ἐπωνομάσθαι, ὡς ἐν τῷ περὶ αὐτῆς λόγῳ πειρασόμεθα δεῖξαι, ὅταν καὶ τῶν ἄλλων ἀπὸ μονάδος μέχρις αὐτῆς ἀριθμῶν ἑκάστου ἐπανθήματα εὐθὺς ἑξῆς μετὰ τήνδε τὴν εἰσαγωγὴν δεικνύωμεν.

Τὰ νῦν δὲ περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας ῥητέον ἐν τέσσαρσιν ὅροις ὑπαρχούσης καὶ ἰδίως μουσικῆς ἐπικληθείσης διὰ τὸ τοὺς μουσικοὺς λόγους τῶν καθ' ἁρμονίαν συμφωνιῶν τρανότατα ἐν αὐτῇ περιέχεσθαι. εὕρημα δ' αὐτήν φασιν εἶναι Βαβυλωνίων καὶ διὰ Πυθαγόρου πρώτου εἰς Ἕλληνας ἐλθεῖν. εὑρίσκονται γοῦν πολλοὶ τῶν Πυθαγορείων αὐτῇ κεχρημένοι, ὥσπερ Ἀρισταῖος ὁ Κροτωνιάτης καὶ Τίμαιος ὁ Λοκρὸς **[119]** καὶ Φιλόλαος καὶ Ἀρχύτας οἱ Ταραντῖνοι καὶ ἄλλοι πλείους, καὶ μετὰ ταῦτα Πλάτων ἐν τῷ Τιμαίῳ λέγων οὕτως·[29]

[29] Timaios 36 A-B

Das Mittel aber, das alle abschließt, ist das zehnte, das entsteht, wenn, wie sich der Mittelterm zum kleineren so auch die <Differenz der Außenterme zur Differenz> des größten zum Mittelterm verhält, zum Beispiel <in der Reihe> 3, 5, 8 <5 : 3 = 5 : 3>. Die Eigenart dieser Form besteht darin, dass sie im Verhältnis eines Überteilenden betrachtet wird und eine Grundform bildet, nicht jedoch im Vielfachen und auch nicht im Verhältnis eines Überteiligen. Und auch sie hat die Folge, dass die längliche Zahl, die das <Produkt> der kleineren Glieder darstellt <15>, **[118]** den gleichen Wert ergibt wie das Produkt der genannten Differenzen <5 · 3 = 15>; der Grund liegt darin, dass es sich jeweils um dieselben Zahlen handelt. Auch diese <Form> entsteht aus dem harmonischen <Mittel> 2, 3, 6, das vor den genannten mittleren drei Mitteln <4., 5., 6.> steht, damit zusammenhängende Formen auch von zusammenhängenden (wenn auch nicht wohlgeordneten) Formen entstehen. Indem ich nun die Außenterme des harmonischen <Mittels> addiere <2 + 6 = 8>, gewinne ich den größten Term der zehnten <Form; 8>; aus den beiden kleineren Gliedern <2 + 3 = 5> <gewinne ich> den Mittelwert des zehnten <Mittels>, und den Mittelterm des harmonischen Mittels für sich allein <3> bewahre ich als kleinsten <Term> der zehnten <Form>.

Da sich nun die Zahl aller uns erscheinenden Mittel als zehn herausgestellt hat, wird ein Lobpreis der Zehnerzahl <Dekas> sehr wohl am Platze sein, und zwar, weil dieser Zahl kein vollendetes Verhältnis entgeht, sondern sie wie eine Art von Gefäß <Dechas> die Verhältnisse alles Seienden in sich selbst aufnimmt und aus diesem Grund von den Alten als All, Ganz und Himmel bezeichnet wurde, wie wir in der Darlegung über sie zu zeigen versuchen wollen, wenn wir gleich im Anschluss an diese Einführung die Vorzüglichkeiten auch aller übrigen Zahlen von der Eins an bis zur Zehn hin aufzeigen werden.

Die musikalische Proportion

Jetzt aber müssen wir über die vollkommenste Proportion sprechen, die in vier Termen gegeben ist und im eigentlichen Sinn "musikalisch" genannt wird, weil die musikalischen Verhältnisse der harmonischen Zusammenklänge in ihr am deutlichsten eingeschlossen sind.Man behauptet, sie sei eine Erfindung der Babylonier und sei zuerst durch Pythagoras zu den Griechen gekommen. Jedenfalls zeigt sich, dass viele Pythagoreer sie angewandt haben, zum Beispiel Aristaios von Kroton, Timaios von Lokroi, **[119]** auch Philolaos und Archytas, beide von Tarent und mehrere andere und nach diesen Platon, der im Timaios folgendes sagt:

ʻμετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦτο τά τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσάν τε καὶ ὑπερεχομένην, τὴν δ' ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην· ἡμιολίων δὲ καὶ ἐπιτρίτων διαστάσεων διὰ πασῶν τῷ τοῦ ἐπογδόου λείμματι συνεπληροῦτο’· καὶ τὰ τούτοις ἐφεξῆς, ἅπερ δῆλα πάντα ἔσται μετὰ τὴν τῆς ἀναλογίας ταύτης παράδοσιν.

ἔστιν οὖν ἡ μουσικὴ καλουμένη ἀναλογία ἐν ὅροις τέσσαρσι, δύο μὲν ἄκροις δύο δὲ μέσοις, ὥστ' ἐμπεπλέχθαι διαφόρους ὄντας τοὺς λόγους τῶν μέσων ὅρων πρὸς τοὺς ἄκρους κατὰ τὰς ἐν ἁρμονίαις συμφωνίας διεστώσαις.

ἐπεὶ γὰρ τὰ κατὰ μουσικὴν ἐν ἁρμονίᾳ σύμφωνα γίνεται, φθόγγων δυεῖν ἢ καὶ πλειόνων οὐχ ὁμοφώνων ὑπὸ μίαν πλῆξιν κατακιρναμένη καὶ τῇ ἀκοῇ ἑνοειδῶς προσπιπτόντων, ἐλάχιστον δὲ καὶ πρῶτον τῇ ἀκοῇ αἰσθητὸν σύμφωνον διάστημά ἐστι τὸ διὰ τεσσάρων· ἐν τοσαύτῃ γὰρ αἱ περιέχουσαι αὐτὸ χορδαὶ ἀποστάσει εἰσὶν ἀπ' ἀλλήλων. ἔστι δὲ τοῦτο ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ, μεθ' ὃ μιᾶς χορδῆς προσληφθείσης τὸ μὲν ὅλον διά**[120]**στημα παρὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν διὰ πέντε κέκληται, ἐν λόγῳ δὲ καὶ αὕτη ἡμιολίῳ τυγχάνει.

διαφορὰ δὲ τούτου πρὸς τὸν ἕτερον τὸ περιεχόμενόν ἐστι διάστημα ὑπὸ τῆς προσληφθείσης πέμπτης χορδῆς τονιαῖον ὑπάρχον καὶ ἐν ἐπογδόῳ λόγῳ τυγχάνον, ὥστε τὸ μὲν διὰ πέντε τοῦ διὰ τεσσάρων τόνῳ ὑπερέξει, ὁ δὲ ἡμιόλιος λόγος ἐπιτρίτου ἐπογδόῳ.

καὶ ταῦτα μὲν ἀσύνθετα διαστήματα καὶ ἁπλῶς ἐν συμφώνοις κατείληπται, ἐξ ὧν συντιθεμένων τὰ μείζονα κατακορεστέραν ἤδη τὴν συμφωνίαν ἀποδίδωσι, καὶ πρῶτόν γε τὸ διὰ πασῶν καλούμενον ὅπερ ἐξ ἀμφοτέρων ἐκείνων σύνθετόν ἐστιν, ἐπικληθὲν καὶ αὐτὸ οὕτως, ὅτι πάσας ἐμπεριέχει τὰς τὰ ἁπλᾶ σύμφωνα ἀποτελούσας χορδάς, καὶ ἔστιν ἐν λόγῳ διπλασίῳ· παντὸς γὰρ ἐπιτρίτου καὶ ἡμιολίου λόγου σύστημά ἐστιν ὁ διπλάσιος.

ἐξ αὐτοῦ δὲ πάλιν τοῦ διπλασίου καὶ ἑκατέρου τῶν ἐξ ἀρχῆς <τὸ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ τεσσάρων καὶ τὸ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε>.

"Hierauf aber füllte er <der Demiurg> sowohl die zweifachen als die dreifachen Zwischenräume auf, indem er noch Teile von dort <vom Ganzen> abschnitt und in die Mitte zwischen diese setzte, so dass in jedem Zwischenraum zwei Mittel<terme> sich befanden, von denen das eine um denselben Teil der äußersten Terme diese übertraf und übertroffen wurde, das andere aber um das Gleiche der Zahl nach sie sowohl übertraf als auch übertroffen wurde. Da aber Zwischenräume von Eineinhalb und Eineindrittel entstanden, füllte er sie durchgehend mit dem Zwischenraum von Eineinachtel aus". Und so geht es dann noch weiter, doch wird dies alles nach der Lehre über diese Proportion klar sein.

Die sogenannte musikalische Proportion besteht nun aus vier Termen, von denen zwei die Außenterme, zwei die Mittelterme sind, so dass die verschiedenen Verhältnisse der Mittelterme zu den Außentermen entsprechend den Zusammenklängen in Harmonien darin verwoben sind.

Da nämlich das Zusammenklingen entsprechend der Musik in Harmonie erfolgt, wobei zwei oder mehrere Töne, die nicht übereinstimmen <dissonant sind>, unter einem Schlag vermischt werden und als einförmig <konstant> ins Ohr fallen, ist aber der kleinste und zugleich erste hörbare harmonische Abstand das Diatessaron-Intervall. In einem so großen Abstand nämlich befinden sich die es umfassenden Saiten voneinander. Dieses <Verhältnis> ist aber im Verhältnis Eineindrittel, und wenn man dann noch eine einzige Saite hinzunimmt, wird das ganze **[120]** Intervall aus demselben Grunde Diapente genannt, und auch dieses Intervall steht im Verhältnis Eineinhalb.

Der Unterschied aber des Diapente-Verhältnisses zum Diatessaron-Verhältnis besteht in dem Abstand, der durch die fünfte hinzugenommene Saite gerade eine Tonstufe ausmacht und im Verhältnis Eineinachtel steht, so dass das Intervall Diapente um einen Ton größer sein wird als das Intervall Diatessaron und das Verhältnis Eineinhalb um Eineinachtel größer als das Verhältnis Eineindrittel.

Und dieses sind nicht zusammengesetzte Abstände und werden einfach in Zusammenklängen erfasst; wenn man sie jedoch zusammensetzt, werden die größeren Abstände schon einen volleren Zusammenklang ergeben, und zwar zuerst das sogenannte Diapason, das aus den beiden anderen zusammengesetzt ist. Auch dieses Intervall ist deshalb so genannt, weil es alle Saiten umfasst, die die einfachen Zusammenklänge erzeugen, und es steht im Verhältnis des Doppelten, ist doch das Doppelte die Zusammensetzung des gesamten Verhältnisses Eineindrittel und Eineinhalb.

Wiederum aber aus dem Doppelten und den beiden anfänglichen Verhältnissen <entstehen die Verhältnisse Diapason zugleich mit Diatessaron und Diapason zusammen mit Diapente.>.

τὸ δὲ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ τεσσάρων λεγόμενον οἱ Πυθαγορικοὶ μὲν σύμφωνον οὐκ ᾤοντο εἶναι, διαφεῦγον πολλαπλάσιόν τε καὶ ἐπιμόριον λόγον καὶ ἔτι ἐπιμερῆ, εἰς δὲ μικτὴν σχέσιν ἐκπῖπτόν ἐστι· καὶ γὰρ ὡς η′ πρὸς γ′, διότι τὰ μὲν ς′ τοῦ γ′ διπλάσια, τὰ δὲ η′ τοῦ ς′ ἐπίτριτα· εἰς δ' οὖν τὸ παρὸν κατὰ τοὺς νεωτέρους νομιζέσθω καὶ αὐτὸ σύμ**[121]**φωνον, σαφηνείας ἕνεκα τῶν ἑξῆς. μεθ' ὃ πάλιν τὸ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε σύμφωνόν ἐστιν ἐν τριπλασίῳ λόγῳ ὄν, διότι ἐκ διπλασίου καὶ ἡμιολίου ὁ τριπλάσιος λόγος σύγκειται· διπλάσια μὲν γὰρ τὰ ς′ τῶν γ′, ἡμιόλια δὲ τὰ θ′ τῶν ς′, ἅπερ πρὸς γ′ ἐν τριπλασίῳ λόγῳ ἐστίν. ἑαυτῷ δὲ τὸ διπλάσιον συντεθὲν ποιεῖ τὸ δὶς διὰ πασῶν σύμφωνον διάστημα ἐν λόγῳ ὂν τετραπλασίῳ· δὶς γὰρ ὁ διπλάσιος λόγος τετραπλάσιός ἐστι.

τὰς δὲ ε′ τούτῳ μείζονας συμφωνίας συμβαίνει γίνεσθαι, προσπλεκομένων πάλιν τῇ δὶς διὰ πασῶν τῶν ἐξ ἀρχῆς ἁπλῶν διαστημάτων, ἃ νῦν παρίεμεν ἑκόντες, ὡς εὐκαιρότερον ὂν ἐν αὐτῇ τῇ Μουσικῇ εἰσαγωγῇ περὶ αὐτῶν τεχνολογεῖν.

τὰς δὲ ἐπιτάσεις καὶ ἀνέσεις τῶν χορδῶν κατὰ τοὺς εἰρημένους λόγους γινομένας πρῶτον Πυθαγόραν ἱστοροῦσι συμμετρήσασθαι·

παριόντα γὰρ εἴς τι χαλκοτυπεῖον, καὶ ἐκ τῆς τῶν ῥαιστήρων καταφορᾶς συμφώνου ἀπηχήσεως ἐπακούσαντα, συσταθμίσασθαι τὰ βάρη, καὶ εὑρόντα *** καὶ ἐν λόγοις τοῖς εἰρημένοις, μεγαλοφυῶς περινοῆσαι καὶ ποικίλαις ὕλαις ἐφαρμόσαι τοὺς αὐτοὺς λόγους, νῦν μὲν μήκεσι χορδῶν ἢ ἰσοπαχῶν μέν, κατὰ δὲ τὴν κολόβωσιν συμμετρηθεισῶν πρὸς ἀλλήλας, ἢ ἀνάπαλιν ἰσομηκῶν μέν, ἀναλόγως δὲ παχυνθεισῶν, νῦν δὲ κατὰ μὲν τὰ προειρημένα ἀδιαφόρων οὐσῶν κατὰ δὲ μόνην τὴν τάσιν διαφόρως συμ**[122]**μετρηθεισῶν, πολλάκι δὲ καὶ κατὰ δύο τῶν εἰρημένων καὶ τρεῖς διαφορὰς τὴν ἐξέτασιν ἀναλαμβανουσῶν.

Das Intervall Diapason und Diatessaron zusammengenommen hielten die Pythagoreer indes nicht für harmonisch, weil es vor dem Vielfachen flieht und ebenso vor dem Überteiligen und noch dazu vor dem Überteilenden, sondern in die gemischte Relation fällt. Wie sich nämlich 4 zu 3 verhält (weil auch 6 das Doppelte von 3 ist), ist 8 das Eineindrittelfache von 6. Für die jetzige Zeit aber soll nach den jüngeren Pythagoreern auch dieses **[121]** Intervall als harmonisch gelten, und zwar wegen der Klarheit des Folgenden. Anschließend wird wiederum das Verhältnis Diapason und Diapente zusammen eine Harmonie im Verhältnis 1 : 3 bilden, weil aus dem Doppelten und dem Verhältnis Eineinhalb das Verhältnis des Dreifachen zusammengesetzt ist. Bildet doch 6 das Doppelte von 3, und 9 ist das Anderthalbfache von 6, wobei 9 zu 3 im Verhältnis des Dreifachen steht. Wenn man aber das Intervall Diapason zu sich selbst addiert, entsteht das Intervall zweimal Diapason, das ein harmonisches Verhältnis im Vierfachen ist. Denn zweimal das Verhältnis des Doppelten ergibt das Verhältnis des Vierfachen.

Es fügt sich aber, dass die folgenden Zusammenklänge größer werden, wenn nämlich wiederum zu dem Intervall zweimal Diapason die anfänglichen einfachen Intervalle hinzugefügt werden, die wir aber hier mit Absicht übergehen, weil man über sie passender in der eigentlichen Einführung in die Musik abhandeln wird.

Das Anspannen und Nachlassen der Saiten entsprechend den geschilderten Verhältnissen soll, wie man berichtet, zuerst Pythagoras gemeinsam ausgemessen haben.

Als er nämlich an einer Schmiede vorüberging und im Schlag der Hämmer einen harmonischen Klang heraushörte, habe er deren Gewichte gegeneinander ausgewogen, herausgefunden, dass sie <ein gemeinsames Maß haben> und in den genannten Verhältnissen standen, und habe in seinem großen Sinn nachgedacht und dieselben Verhältnisse an verschiedene Dinge angelegt, einmal an die Länge der Saiten, die entweder gleich dick waren, aber entsprechend der Verkürzung in ein gemeinsames Maß zueinander gebracht wurden, oder wiederum zwar gleich lang waren, aber – entsprechend - verschiedene Dicke bekamen, die auch einmal (nach dem vorher Gesagten) keine Unterschiede aufwiesen, sondern nur entsprechend der Anspannung auf verschiedene Weise in ein gemeinsames Maß **[122]** zueinander gebracht werden, vielfach aber auch entsprechend zwei oder drei der genannten Intervalle untersucht werden konnten.

ἤδη δὲ κἀπὶ τῶν συρίγγων καὶ αὐλῶν καὶ ὅλως τῶν ἐμπνευστῶν τὸ ἀνάλογον ἐφαρμόζειν αὐτῷ ῥᾷστον ἦν· κἀκεῖ γὰρ ἀκολούθως τοῖς ἐντατοῖς τά τε μήκη καὶ αἱ κοιλώσεις κατὰ τοὺς εἰρημένους λόγους συμμετρούμεναι τὰς συμφωνίας ἀπετέλουν, τῆς μὲν εὐρύτητος καὶ μακρότητος τῶν αὐλῶν ἀναλογούσης πάχει καὶ μήκει καὶ ἀνέσει χορδῆς, στενότητος δὲ καὶ βραχύτητος λεπτότητί τε καὶ ἐπιτάσει καὶ βραχύτητι. τὰς δ' αἰτίας, δι' ἃς τοῦτο συνέβαινε, κατ' οἰκεῖον τόπον ἐν αὐτῇ τῇ Μουσικῇ εἰσαγωγῇ σαφηνιοῦμεν.

τὰ νῦν δὲ ὡς ἐν ἐπιδρομῇ θεωρητέον ἐπ' ἀριθμῶν τοὺς εἰρημένους λόγους. ἵνα τοίνυν ἐπίτριτον ἀποστήσῃ τις λόγον, ἀριθμοῦ δεῖ τρίτον ἔχοντος· ὁ γὰρ τούτου ἐπίτριτος πάντως ἥμισυ ἕξει, ὅπως καὶ ὁ τούτου ἡμιόλιος πρὸς τὸν ἐξ ἀρχῆς διπλάσιον, ὡς ἔχει ἐπὶ τῶν ς′ η′ ιβ′.

ἢ πάλιν ἵνα ἡμιόλιον λόγον ποιήσω, ἀριθμοῦ δεῖ ἥμισυ ἔχοντος, ἵν' ὁ ἡμιόλιος αὐτοῦ τεινόμενος τρίτον ἀναγκαίως ἔχων ὑπεπίτριτον λόγον πρὸς ἄλλον τινὰ ὅρον παράσχῃ, ὃς τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἔσται πάλιν πολλαπλάσιος, ὡς ἔχει ἐπὶ τῶν ς′ θ′ ιβ′.

εἰ δὴ τηρήσαιμεν τοὺς ἄκρους ὅρους ἑστῶτας, ἐπειδὴ καὶ οἱ αὐτοί εἰσιν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς μεσότησι, τὸν ς′ λέγω καὶ τὸν ιβ′, τοὺς δὲ μέσους ἅμα τάξαιμεν μεταξὺ αὐτῶν, ἔσται ἡ εἰρημένη διὰ τεσσάρων ὅρων μουσικὴ ἀναλογία ἡ ς′ η′ θ′ ιβ′.

πρῶτον δ' ἐτάξαμεν αὐτῆς τὸν ς′ ἀριθμόν, ἐπειδὴ τρίτου ἅμα καὶ ἡμίσους πρῶ**[123]**τος ἦν ἐπιδεκτικός, ἵνα ἀπ' αὐτοῦ τοὺς εἰρημένους λόγους ἀποστῆσαι δυνηθῶμεν, ἐπίτριτον μὲν τὸν η′ πρὸς τὸν ἡμιόλιον τὸν ιβ′, ὃς διπλάσιος ἔσται τοῦ ἐξ ἀρχῆς ς′, ἢ πάλιν ἡμιόλιον μὲν τὸν θ′ πρὸς τὸν ἐπίτριτον τὸν ιβ′, ὃς πάλιν ἔσται τοῦ ἐξ ἀρχῆς διπλάσιος. καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ προειρημένη ἐμπλοκὴ τῶν μέσων ὅρων πρὸς τοὺς ἄκρους.

Schließlich fiel es ihm sehr leicht, auch bei den Panflöten und den einfachen Flöten und überhaupt bei den Blasinstrumenten das analoge Verhältnis anzulegen. Denn auch bei diesen brachten ebenso wie bei den Saitenspannungen die Länge und die Höhlungen, wenn man sie in den geschilderten Verhältnissen gemeinsam maß, die Zusammenklänge hervor, wobei sich die Breite und Länge der Flöten entsprechend der Dicke, Länge und Entspannung der Saite verhielt, ihre Enge aber und Kürze entsprechend der Dünnheit und Anspannung und Kürze <bei der Saite>. Die Ursachen aber, aus denen dieses geschah, werden wir an der passenden Stelle in der "Einführung in die Musik" selbst deutlich machen.

Für jetzt aber müssen wir in kurzem Anlauf die genannten Verhältnisse anhand von Zahlen betrachten. Um nun das Verhältnis Eineindrittel aufzustellen, braucht man eine Zahl, die ein Drittel hat. Denn die eineindrittelmal größere Zahl wird grundsätzlich eine Hälfte haben, wie auch das Eineinhalbfache dieser Zahl das Doppelte gegenüber der Zahl vom Anfang; so verhält es sich bei den Zahlen 6, 8, 12.

Oder wiederum, um das eineinhalbfache Verhältnis herzustellen, benötigt man eine Zahl, die eine Hälfte hat, damit das Eineinhalbfache davon, um ein Drittel erweitert, notwendigerweise das Verhältnis Ganzes weniger ein Drittel zu einem anderen Term herstellt; und dieser Term wird wieder ein Vielfaches der ersten Zahl sein, wie es sich bei den Zahlen 6, 9, 12 verhält .

Wenn wir nun die Werte beachten, die als Außenterme stehen (die ja bei beiden Mitteln <6 : 9 : 12 und 6 : 8 : 12> gleich sind, nämlich 6 und 12), und die beiden Mittelterme zugleich zwischen sie hineinstellen <8 und 9>, dann wird dies die geschilderte musikalische Proportion mit vier Termen sein, nämlich 6, 8, 9, 12.

Als erste Zahl davon stellten wir die Zahl 6 hin, weil die erste Zahl zugleich ein Drittel und die Hälfte **[123]** in sich aufnehmen müsste, um von ihr aus die geschilderten Verhältnisse aufstellen zu können, und zwar Eineindrittel, nämlich 4 im Verhältnis zur eineinhalbmal so großen Zahl 12 (diese Zahl ist zugleich das Doppelte der Ausgangszahl 6), oder wieder die eineinhalbmal so große Zahl 9 im Verhältnis zur eineindrittelmal so großen Zahl 12 (die ihrerseits wiederum das Doppelte der Anfangszahl 6 bildet). Und dies ist die vorher besprochene Verknüpfung der Mittelterme mit den Außentermen.

ὅτι δ' ἀναγκαῖον ἦν πρῶτον τάξαι τὸν ϛʹ πρὸς τὴν τῶν λόγων ἀπόστασιν, ἐντεῦθεν ἂν μάθοιμεν· μονάδα μὲν γὰρ οὐχ οἷόν τ' ἦν, ἐπειδὴ ἀμερὴς ὑπόκειται καὶ οὔτε ἥμισυ οὔτε τρίτον ἔχει, ἀλλ' οὐδὲ δυάδα, διότι ἥμισυ μὲν ἔχει τρίτον δ' οὐκ ἔχει, οὐδὲ μὴν τὴν τριάδα τρίτον μὲν ἔχουσαν ἥμισυ δ' οὐκ ἔχουσαν, οὐδὲ τετράδα διὰ τὰ αὐτὰ τῇ δυάδι (τρίτου γὰρ καὶ αὕτη ἐστέρηται), τὴν δὲ πεντάδα διὰ τὰ αὐτὰ τῇ μονάδι οὔθ' ἥμισυ οὔτε τρίτον ἔχουσαν.

πρῶτος δὴ καὶ ἐλάχιστος ἡμῖν ὁ ϛʹ χρησιμεύσει πρὸς τὰς τῶν λόγων ἀποστάσεις, ἀποτέλεσμα ὢν τῶν δύο πρώτων ἀριθμῶν καὶ ἡμίσους καὶ τρίτου ἐπιδεκτικῶν, λέγω δὲ τοῦ βʹ καὶ γʹ. πρὸς δὴ τὸν ϛʹ ὁ μὲν ηʹ ἐπίτριτος ὢν περιέξει τὴν διὰ τεσσάρων συμφωνίαν.

καὶ ἐπεὶ πρὸς τὸν ηʹ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ ιβʹ περιέχων τὴν διὰ πέντε, πρὸς τὸν ἐξ ἀρχῆς ϛʹ ὁ αὐτὸς ιβʹ διπλάσιος ὢν <περιέξει τὴν διὰ πασῶν> συμφωνίαν σύνθετον οὖσαν ἐκ τῆς διὰ τεσσάρων καὶ διὰ πέντε. καὶ πάλιν τοῦ ϛʹ ὁ θʹ ἡμιόλιος ὢν περιέξει τὴν διὰ πέντε, πρὸς δὲ τὸν θʹ ὁ ιβʹ τὴν διὰ τεσσάρων ἐπίτριτος ὢν αὐτοῦ, πρὸς δὲ τὸν ἐξ ἀρχῆς ϛʹ πάλιν τὴν διὰ πασῶν.

τὴν δὲ ὑπεροχὴν τοῦ διὰ πέντε πρὸς τὸ διὰ τεσσάρων, τὸ τονιαῖον **[124]** διάστημα, περιέξουσιν οἱ μέσοι ὁ θʹ πρὸς ηʹ ἐν ἐπογδόῳ λόγῳ ὄντες, διότι ὁ ἡμιόλιος λόγος τοῦ ἐπιτρίτου ἐπογδόῳ ὑπερέχει, ὡς εἴρηται.

καὶ ἡ διαφορὰ δὲ μειζόνων ὅρων τοῦ ιβʹ καὶ θʹ <πρὸς τὴν> τοῦ ηʹ καὶ ϛʹ τὸν ἡμιόλιον λόγον περιέξει, ὅς ἐστι τῆς διὰ πέντε συμφωνίας· καὶ κατ' ἐμπλοκὴν ἡ διαφορὰ τοῦ ιβʹ καὶ ηʹ πρὸς διαφορὰν τοῦ θʹ καὶ ϛʹ τὸν ἐπίτριτον ἕξει λόγον τῆς διὰ τεσσάρων συμφωνίας·

τὸν δὲ διπλάσιον ἥ τε τοῦ ηʹ καὶ ϛʹ διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ ηʹ καὶ θʹ διαφοράν, καὶ ἡ τοῦ ιβʹ καὶ ηʹ διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ ηʹ καὶ ϛʹ διαφοράν, καὶ ἔτι ἡ τοῦ ιβʹ καὶ ϛʹ διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ θʹ καὶ ϛʹ διαφοράν. καθ' ἑκάστην γὰρ συζυγίαν λόγος ἐστὶ τῆς διὰ πασῶν συμφωνίας ὁ διπλάσιος.

Dass es aber notwendig war, zuerst die Zahl 6 hinzustellen, um die Verhältnisse aufzustellen, können wir aus folgendem lernen: Die Eins konnten wir ja nicht hinstellen, weil sie von Haus aus unteilbar ist und weder eine Hälfte noch ein Drittel besitzt; auch konnten wir die Zwei nicht verwenden, weil sie zwar eine Hälfte, aber kein Drittel hat; ebenso ging es nicht mit der Drei, die zwar ein Drittel besitzt, aber keine Hälfte hat; auch die Vier war nicht zu gebrauchen, weil bei ihr die gleichen Verhältnisse wie bei der Zwei vorliegen (fehlt es doch auch ihr am Drittel); die Fünf aber war nicht möglich, weil es bei ihr wie bei der Eins ist und sie weder eine Hälfte noch ein Drittel besitzt.

Unsere erste und kleinste Zahl nun, die 6, wird uns beim Aufstellen der Verhältnisse von Nutzen sein, da sie das Produkt der beiden ersten Zahlen ist, die eine Hälfte und ein Drittel aufnehmen, ich meine nämlich 2 und 3. Im Verhältnis zur 6 nun wird die 8, die Eineindrittel dazu bildet, den Zusammenklang der Quart <8 : 6; 4 : 3> umfassen.

Und weil gegenüber der Zahl 8 das Eineinhalbfache die 12 ist, die auch die Quint umfasst <12 : 8; 3 : 2>, und weil gegenüber der Anfangszahl 6 dieselbe Zahl 12 das Doppelte ist, wird sie den Diapason-Zusammenklang umfassen, der aus Quart und Quinte zusammengesetzt ist. Und wiederum wird die Zahl 9, die das Eineinhalbfache von 6 ist, die Quint umfassen, und gegenüber der Zahl 9 wird die Zahl 12 die Quart einschließen, weil sie das Eineindrittelfache von ihr darstellt, und gegenüber der Anfangszahl 6 wird die 12 wiederum die Oktave umfassen.

Den Überschuss aber der Quint gegenüber der Quart, den Abstand eines Tones, **[124]** werden die beiden Mittelterme, die Zahl 9 gegenüber der Zahl 8 umfassen, die sich im Verhältnis Eineinachtel befinden, weil das Verhältnis eineinhalb gegenüber dem Verhältnis Eineindrittel um ein Achtel größer ist, wie schon gesagt.

Und der Unterschied der größeren Terme, der Zahlen 12 und 9 im Verhältnis zur Differenz zwischen 8 und 6, wird das Verhältnis eineinhalb umfassen, das zu dem Quint-Zusammenklang gehört. Und dementsprechend wird das Verhältnis der Differenz von 12 und 8 zur Differenz von 9 und 6 die Proportion Eineindrittel des Quart-Zusammenklanges besitzen.

Das Doppelte aber bringt die Differenz von 8 und 6 im Verhältnis zur Differenz von 8 und 9 und ebenso die Differenz von 12 und 8 im Verhältnis zur Differenz von 8 und 6 <4 : 2>, und schließlich noch die Differenz von 12 und 6 im Verhältnis zur Differenz von 9 und 6 <6 : 3>. Das doppelte Verhältnis jeder Paarung nämlich stimmt mit der Oktav-Harmonie überein.

τὸν δὲ τριπλάσιον λόγον περιέξει τῇ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε συμφωνίᾳ ἡ διαφορὰ τοῦ τε θʹ καὶ ςʹ πρὸς διαφορὰν τοῦ θʹ καὶ ηʹ, ἢ καὶ <ἡ> διαφορὰ τοῦ ιβʹ καὶ ςʹ πρὸς διαφορὰν τοῦ ηʹ καὶ ςʹ. τὸν δὲ τετραπλάσιον λόγον τῆς <δὶς> διὰ πασῶν συμφωνίας, ἡ τοῦ ιβʹ καὶ ηʹ [ἡ] διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ θʹ καὶ ηʹ διαφοράν.

καὶ πλείονας δ' ἄν τις εὕροι λόγους τῶν συμφώνων διαστημάτων πολλαπλασιάσας τοὺς ἐκκειμένους τέσσαρας ὅρους ἐπί τε αύτοὺς ἕκαστον καὶ ἐπ' ἀλλήλους, καὶ ἔτι ἐπὶ τὰς αὐτῶν διαφοράς, καὶ αὐτὰς τὰς διαφορὰς καθ' ἑαυτάς τε καὶ ἐπ' ἀλλήλας, ὡς ἔνεστι κατὰ τὸ φιλόκαλον δι' αύτοῦ ἕκαστον πειραθέντα κατανοῆσαι.

ἔστιν οὖν πάλιν μουσικὴ μεσότης, ὅταν ἐν τέτταρσιν ὅροις ᾖ ὡς **[125]** ὁ μέγιστος πρὸς τὸν παρ' αὐτόν, οὕτως ὁ τῶν μέσων ἐλάττων πρὸς τὸν ἐλάχιστον· ὡς δ' ὁ μέγιστος πρὸς τὸν τῶν μέσων ἐλάττονα, οὕτως ὁ τῶν μέσων μείζων πρὸς τὸν ἐλάχιστον.

παρακολουθεῖ δὲ αὐτῇ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων πρόμηκες ἴσον ἀποτελεῖν τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ ἑτερομήκει. περιέχει δὲ καὶ τὰς πρωτίστας τρεῖς μεσότητας μόνη, ἀριθμητικὴν μὲν ἐν ὅροις τοῖς ιβʹ θʹ ςʹ· ἴσως γὰρ ὁ μέσος <ὑπερέχει καὶ> ὑπερέχεται.

ἁρμονικὴν δὲ ἐν ὅροις τοῖς ιβʹ ηʹ ςʹ· τῷ γὰρ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὁ μέσος ὑπερέχει τε καὶ ὑπερέχεται. τὴν δὲ γεωμετρικὴν ἐν διαζεύξει· ἔστι γὰρ ὡς ιβʹ πρὸς ηʹ, θʹ πρὸς ςʹ, ὥστε τὴν ταυτότητα τῶν λόγων διὰ τῶν δʹ ὅρων ἀποδοθῆναι.

Das dreifache Verhältnis aber wird durch den Zusammenklang der Oktave und der Quint die Differenz zwischen 9 und 6 im Verhältnis zur Differenz von 9 und 8 umfassen <3 : 1> oder auch die Differenz von 12 und 6 im Verhältnis mit der Differenz von 8 und 6 <6 : 2>. Das Verhältnis des Vierfachen aber beim Zusammenklang der Doppeloktave wird die Differenz von 12 und 8 zur Differenz von 9 und 8 <4 : 1> umfassen.

Und man könnte noch weitere Verhältnisse der zusammenklingenden Abstände finden, wenn man die in Reihe dastehenden vier Terme multipliziert, sowohl jeden mit sich selbst wie auch miteinander, auch wenn man ihre Differenzen multipliziert, wieder auch die Differenzen mit sich selbst und miteinander multipliziert, wie es eben möglich ist, dass jeder aufgrund seiner Liebe zum Schönen selbst Versuche macht und Erkenntnisse gewinnt.

Es liegt nun wiederum ein musikalisches Mittel vor, wenn in vier Termen so wie sich **[125]** der größte zu dem danebenstehenden verhält, so der kleinere der Mittelterme zum kleinsten <Term> überhaupt. Oder: Wie sich der größte <Term> zum kleineren der beiden Mittel<terme> verhält, so verhält sich der größere der Mittel<terme> zum kleinsten überhaupt <12 : 9 = 8 : 6; 12 : 8 = 9 : 6>.

Dieses Mittel hat zur Folge, dass sie das Produkt der ungleichen Außenterme, eine längliche Zahl, ebenso groß macht wie die Rechteckzahl, die das Produkt der Mittelterme darstellt <6 · 12 = 72; 8 · 9 = 72>. Sie umfasst aber auch allein die ersten drei Mittel, das arithmetische in den Größen 12, 9, 6; der mittlere Term <übertrifft nämlich> hier in gleicher Weise wie er übertroffen wird <jeweils um 3>.

Das harmonische Mittel aber umfasst es in den Werten 12, 8, 6; denn der mittlere Term übertrifft um denselben Teil die beiden Außenterme und wird übertroffen <8 ist um 2 größer als 6, um 4 kleiner als 12; $2 = \frac{1}{3}$ von 6 und $4 = \frac{1}{3}$ von 12>. Das geometrische Mittel aber umfasst es in der Trennung; es verhält sich nämlich wie 12 zu 8 so 9 zu 6 <3 : 2>, so dass die Identität der Verhältnisse durch die 4 Terme gewährleistet wird.

Καὶ τοῦτο μὲν ἡμῖν πέρας τῆς Εἰσαγωγῆς ἔστω τὸ παρὸς τῆς κατὰ τὸν Πυθαγόρειον Νικόμαχον, αὖθις δὲ θεοῦ διδόντος ἐντελέστερόν σοι καὶ αὐτὴν ταύτην τὴν Ἀριθμητικὴν εἰσαγωγὴν ὡς ἂν ἤδη ἕξιν παρακολουθητικὴν διὰ ταύτης ἐσχηκότι ποιήσαντες παρέξομεν· καὶ ὅσα δὲ ἄλλα ἐπανθεῖ τοῖς ἀπὸ μονάδος μέχρι δεκάδος ἀριθμοῖς κατὰ τὸν φυσικὸν λόγον καὶ τὸν ἠθικὸν καὶ ἔτι πρὸ τούτων τὸν θεολογικὸν κατατάξαντες συμφιλολογήσομεν, ἵνα ἀπ' αὐτῶν εὐμαρεστέρα σοι λοιπὸν καὶ ῥᾴστη τῶν ἑξῆς τριῶν εἰσαγωγῶν, μουσικῆς λέγω καὶ γεωμετρικῆς καὶ σφαιρικῆς, ἡ παράδοσις γίνηται.

Epilog

Und dies sei für jetzt das Ende unserer Einführung nach der Methode des Pythagoreers Nikomachos. Wenn es aber Gott so gibt, werden wir dir auch diese Arithmetische Einführung selbst vollkommener zugänglich machen, da du dann durch die vorliegende Einführung schon die Fähigkeit gewonnen hast, dem Gedanken folgen zu können. Und was sonst noch aus den Zahlen von der Eins bis zur Zehn erblüht gemäß dem natürlichen Verhältnis, dem ethischen und noch vor diesen dem theologischen, all dies werden wir vor dich hinstellen und zusammen erforschen, damit dir davon in Zukunft der Unterricht in den folgenden drei Einführungen bequemer und besonders leicht fällt, nämlich in die Musik, die Geometrie und die Sphärik.

NACHWORT
VON EBERHARD KNOBLOCH

Iamblichos und seine Schrift
Über die Einführung des Nikomachos in die Arithmetik

Im Jahre 2000 haben Otto Schönberger und ich in derselben Reihe *Subsidia Classica* unsere deutsche Übersetzung der Schrift *Von der allgemeinen mathematischen Wissenschaft* des Neuplatonikers Iamblichos aus Chalkis in Syrien veröffentlicht. Im dortigen Nachwort habe ich mich ausführlich über Iamblichos und sein Werk geäußert. Deshalb kann ich mich hier hauptsächlich auf seine vorliegende Abhandlung *Über die Einführung des Nikomachos in die Arithmetik* beschränken.

Iamblichos lebte etwa zwischen 240 und 330 n. Chr., war Schüler des Porphyrios und begründete in Apameia die so genannte syrische Schule des Neuplatonismus. Die erhaltenen Schriften sind fast alle Teile einer großen pythagoreischen Dogmatik, eine Sammlung, die mindestens neun, wahrscheinlich aber zehn Bücher umfasste (O'Meara 1990, 33f.). Die vier ersten, erhaltenen Bücher waren: *Über das pythagoreische Leben, Aufruf zur Philosophie, Von der allgemeinen mathematischen Wissenschaft, Über die Einführung des Nikomachos in die Arithmetik.*

Darüber hinaus hat der byzantinische Polyhistor Michael Psellos aus dem 11. Jahrhundert Exzerpte aus den Büchern V bis VII in eigenen Schriften bewahrt (O'Meara 1990, 217-229). Eine enge Beziehung besteht offensichtlich auch zwischen dem Buch VII und der erhaltenen Abhandlung *Theologumena arithmeticae*, in der es um Zahlenmystik geht.

Die Reihe der mathematischen Wissenschaften begann Iamblichos mit der für ihn wichtigsten, mit der Arithmetik. Um eine Einführung in diese Wissenschaft zu geben, erschien es ihm am besten, sich an die entsprechende Schrift *Einführung in die Arithmetik* des Nikomachos von Gerasa aus dem zweiten nachchristlichen Jahrhundert zu halten. Nikomachos behandelt in seiner erhaltenen Schrift die pythagoreische Zahlenlehre. Sie wurde bereits von Apuleius (2. Jh. n. Chr.), später von Boethius (um 484 – 524) übersetzt und wurde bis ins 13. Jahrhundert als Schulbuch benutzt. Iamblichos lobt wiederholt sein Vorbild, betont aber mehr als Nikomachos die ethischen und physikalischen Aspekte der Zahlen, beschreibt also in pythagoreisierender Weise die Wirklichkeit durch mathematische Analogien (Bechtle 2006, 29).

Eberhard Knobloch

Inhaltsübersicht

(Die Seitenzahlen beziehen sich auf die Ausgabe von Pistelli/Klein)

Auch wenn Iamblichos im Einzelnen von seinem Vorbild Nikomachos abweicht, Dinge ergänzt oder weglässt (Robbins, Karpinski in Nicomachus 1926, 127-132; Larsen 1972, 133-147), hält er sich doch an ihn bei der Gesamtstruktur seines Werkes. Auf die Einleitung (3,1-10,7) folgen vier große Kapitel:

1. Über absolute Quantität (posòn kath' hautó), das heißt Theorie der natürlichen Zahlen (10,8-35,10)
2. Über relative Quantität (posòn prós ti), das heißt Verhältnisse natürlicher Zahlen (35,11-56,22)
3. Zahlen im geometrischen Kontext, insbesondere figurierte Zahlen und geometrisch deutbare Produkte von Zahlen (56,23-98,13)
4. Proportionen (98,14-125,13)

Epilog

Einleitung (3,5-10,7)

Iamblichos beginnt damit, die grundlegende Bedeutung der Arithmetik, der mathematischen Wissenschaft (mathematikè epistéme) von den Zahlen (arithmoí), darzulegen (3,1-4,11). Es folgen ein Lob des Nikomachos und dessen *Arithmetischer Kunst* (arithmetikè téchne) und Darlegung des Zweckes des eigenen Werkes (4,12-5,25), Bemerkungen zu Pythagoras und dessen Wissenschaft vom wirklich Seienden (5,25-7,2). Die Klassifizierung der Größen, zu denen ja die Zahlen gehören, führt auf eine kurze Charakterisierung der vier quadrivialen mathematischen Wissenschaften Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie und Platons Stellung dazu. Wichtig ist, dass die Klassifizierung der Größen nicht derjenigen entspricht, die Aristoteles in seiner Metaphysik (V, 13) gibt. Bei Aristoteles ist posón (Quantität) der Oberbegriff, der in die zwei Unterbegriffe plêthos (Menge) und mégethos (Größe) zerlegt werden kann. Iamblichos verwendet plêthos und mégethos in demselben Sinn als diskrete bzw. stetige Größe. posón ist jedoch nicht Oberbegriff, sondern als *das Viele* der Menge zugeordnet und damit Gegenstand der Arithmetik. pelíkon ist als *das Große* der Größe zugeordnet und damit Gegenstand der Geometrie.

Nachwort

1. Kapitel: Über absolute Quantität (posòn kath' hautó), das heißt Theorie der natürlichen Zahlen (10,8-35,10)

Am Anfang steht die Thales zugeschriebene Definition der (natürlichen) Zahl als Zusammenstellung von Einheiten (monádum sýstema) (Heath 1921, 69). Danach ist die Eins keine Zahl. Es folgen die Aussagen zur Zahl verschiedener Pythagoreer wie Eudoxos, Hippasos, Philolaos) und verschiedene Definitionen der Eins bzw. Einheit (monás) (10,8-11,26). Die Ausführungen zur Einheit stehen nicht bei Nikomachos. Entsprechendes findet man aber bei Theon von Smyrna (Robbins, Karpinski in Nicomachus 1926, 127).

Iamblichos nimmt eine erste Haupteinteilung der Zahlen in gerade und ungerade vor, spricht über deren Entstehung, vergleicht die Rolle der Eins mit derjenigen des Nichts als Vertreter der Null. Die Zahlen stellen gegebenenfalls nichtmathematische Werte dar wie etwa die Fünf die Gerechtigkeit (12,1-20,6).

Er unterscheidet drei Arten *gerader* Zahlen und behandelt nach einander die Namen und Eigenschaften dieser Zahlarten. Er kritisiert die Definitionen Euklids (*Elemente* VII, Def., 8, 9), die nur zwischen zwei Arten gerader Zahlen trennen:

1) *gerade mal gerade* (artiákis ártios): Es sind die Potenzen von 2, also 2^n für n=1, 2, 3 usf.: 2, 4, 8 usf. (20,7-22,7).
2) *gerade mal ungerade* (artiákis perissós): 2 (2n-1) für n=1, 2, 3 usf., also 2, 6, 10, 14 usf. Die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden derartigen Zahlen ist 4 (22,8-23,17).
3) *ungerade mal gerade* (perissákis ártios): $(2k + 1)\, 2^n$ für k=1, 2, 3 usf., n = 2,3 usf., also 12 (= 4 · 3 = 2 · 6), 24 (=8 · 3 = 2 · 12) usf. bzw. 20 (= 4 · 5 = 2 · 10), 40 (=8 · 5 = 4 · 10) usf. (23,18-26,17).

Die Zahlen zeichnen sich dadurch aus, dass sie sowohl in ein Produkt gerade mal ungerade wie in ein Produkt gerade mal gerade zerlegt werden können, sie sind also eine Mischung aus den beiden ersten Arten. Die betreffenden Produkte lassen sich systematisch dadurch erzeugen, dass in zwei Zeilen die Folgen der ungeraden Zahlen bzw. der geraden Zahlen ab 4 geschrieben werden und dann jede Zahl der ersten Zeile mit jeder Zahl der zweiten Zeile multipliziert wird. Unter einer ungeraden Zahl stehen alle Produkte dieser Zahl mit allen Zahlen der geometrischen Folge der zweiten Zeile. Der Scholiast gibt folgende Tabelle:

3	5	7	9	11	usf.
4	8	16	32	64	
12	20	28	36	44	
24	40	56	72	88	
48	80	112	144	176	
96	160	224	288	352	
usf.					

Er bemerkt richtig, dass die erste Zeile eine arithmetische Folge darstellt, die Spalten geometrische Folgen.

Es gibt nur zwei Arten *ungerader* Zahlen, die Primzahlen und die zusammengesetzten ungeraden Zahlen (26,18-31,21). Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen wird durch den Euklidischen Algorithmus ermittelt, wie es Euklid (*Elemente* VII,2) lehrt. Zur Ermittlung der Primzahlen lehrt Iamblichos die mechanische Methode, die als *Sieb* (kóskinon) des Eratosthenes bekannt ist. Den Namen des Alexandriners nennt er hier noch nicht, sondern erst im 4. Kapitel über die Proportionen. Gemäß seiner Klassifizierung ist für Iamblichos – wie für Nikomachos – die Zwei keine Primzahl (Heath 1921, 73). Deshalb kritisiert er wieder einmal Euklid und dessen Primzahldefinition (*Elemente* VII, Definition 11), wonach eine Primzahl eine Zahl ist, die sich nur durch die Einheit messen lässt. Danach wäre auch die Zwei eine Primzahl (30,27-31,8).

Der letzte Abschnitt des 1. Kapitels gilt Teiler-Betrachtungen (31,32-35,10), die er wiederum mit ethischen und juristischen Fragen der Lebenswelt in Beziehung setzt. Zahlen heißen *abundant* (hypertelés), *defizient* (ellipés) bzw. *vollkommen* (téleios), wenn die Summen ihrer echten Teiler einschließlich der Eins größer, kleiner als diese Zahlen oder diesen gleich sind.

Iamblichos gibt gemäß Euklid (*Elemente* IX, 36) die hinreichende Bedingung an, vollkommene Zahlen zu konstruieren. Er nennt die ersten vier: 6, 28, 496, 8128. Seine Vermutung, auf jeder Stufe der Zehnerpotenzen (Einser, Zehner, Hunderter, Tausender usf.) finde sich demnach eine vollkommene Zahl, ist falsch (Heath 1921, 74). Die fünfte vollkommene Zahl ist 33550336. Es ist bis heute unbekannt, ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt.

Abschließend erklärt Iamblichos den Begriff *befreundete* Zahlen (phíloi arithmoí): Zwei Zahlen a, b heißen befreundet, wenn die Summe der echten Teiler von a bzw. b die jeweils andere Zahl b bzw. a ergibt. Sein Beispiel ist das Paar 220, 284.

2. Kapitel: Über relative Quantität (posòn prós ti), das heißt Verhältnisse natürlicher Zahlen (35,11-56,22)

Steht eine Größe, das heißt im vorliegenden Zusammenhang eine Zahl, in einem Verhältnis zu einer anderen Zahl, so gibt es die beiden allgemeinsten Relationen der Gleichheit und der Ungleichheit. Iamblichos stellt wie stets seine Ausführungen in einen ethischen und sozialen Kontext und verweist auf seine Lehre von den Proportionen. Sind a, b zwei natürliche Zahlen mit $a > b$, so unterscheidet er zwischen fünf Verhältnissen (Tropfke 1980, 325f.):

$a : b = n$ pollaplásion, *Vielfaches*
$a : b = 1 + \frac{1}{n}$ epimórion (ein Teil darüber), *überteiliges,* superpartikular
$a : b = 1 + \frac{k}{n}$ epimerés (mehrere Teile darüber), *überteilendes*, superpartient
$a : b = m + \frac{1}{n}$ pollaplasiepimórion, *Vielfaches und ein Teil darüber*
$a : b = m + \frac{k}{n}$ pollaplasiepimerés, *Vielfaches und mehrere Teile darüber*

Die fünf inversen Verhältnisse erhalten die Vorsilbe hypo-, unter-.

Zunächst betrachtet Iamblichos das *Vielfache*, insbesondere Quadratzahlen und untersucht dazu die pythagoreische Multiplikationstafel von 1.1 bis 10.10, die freilich nicht im Text aufgeführt ist:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Iamblichos liest zahlreiche Zusammenhänge zwischen den Spalten- und Zeilengliedern ab. Ist k ein Spaltenglied, n ein Zeilenglied, so gilt z.B.

$kn = \frac{1}{2}(k(n-1) + k(n+1))$, $kn = \frac{1}{2}((k-1)\, n + (k+1)\, n)$ (39,16-18)
$\frac{kn + (k-2)(n+2)}{2} = (k-1)(n+1) - 1$ für die steigende Diagonale,
$\frac{kn + (k+2)(n+2)}{2} = (k+1)(n+1) + 1$ für die fallende Diagonale (39,18-20).

Die Diagonale 1, 4, 9 usf. enthält die Quadratzahlen, die darüber liegende Diagonale 2, 6, 12 usf. die Rechteckzahlen. Iamblichos gibt viele Möglichkeiten an, wie sich aus den Zahlen beider Diagonalen neue Quadratzahlen gewinnen lassen, z. B. gilt:

$n(n+1) + (n+1)(n+2) + 2(n+1)^2 = (2n+2)^2$ (39, 24-26)
$n^2 + (n+1)^2 + 2n(n+1) = (2n+1)^2$ (39,27 – 40,1)

Die zweite Art von Verhältnissen ist das *überteilige Verhältnis* (epimórios lógos) (40,21-41,28). Nach der Definition behandelt Iamblichos Beispiele und Konstruktion. Das anderthalbfache (hemiólios lógos) und das ein-eindrittelfache (epítritos lógos) Verhältnis spielen in der Harmonielehre eine wichtige Rolle: Sie entsprechen der Quinte und der Quarte. Man findet ($1 + \frac{1}{n}$)-fache Verhältnisse, indem man in der Zeile der Vielfachen von n den Nachfolger n + 1 mit n ins Verhältnis setzt bzw. kn + k mit kn.

Entsprechend verfährt Iamblichos mit der dritten Art von Verhältnissen oder Relationen (schéseis), dem *überteilenden Verhältnis* (epimerès lógos) (41,29-43,12). Die beiden letzten Verhältnisse fasst er unter dem Namen *vermischte Relationen* zusammen: Sie entstehen aus Vielfachen, überteiligen und überteilenden Verhältnissen. (43,13-51,20). Im Anschluss an Nikomachus (XXIII,8) erklärt er insbesondere mit zahlreichen Beispielen, wie durch eine bestimmte Regel aus einem Zahlen-Tripel alle möglichen Vielfachen, überteiligen oder überteilenden Verhältnisse zu gewinnen sind: Man wende auf das Tripel (a_1, a_2, a_3) die Transformation (a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + 2a_2 + a_3$) an.

Aus einem Tripel der Gleichheit wie (1,1,1) gewinnt man so Tripel der Ungleichheit, in diesem Fall durch schrittweise Wiederholung der Operation das Zweifache, Dreifache usf., nämlich (1,2,4), (1,3,9) usf. bzw. aus (2,2,2) die Tripel (2,4,8), (2,6,18) usf. bzw. aus dem Tripel Unter-Vielfacher (4,2,1) das überteilige Verhältnis (4,6,9), daraus Vielfache mit einem Teil darüber (4,10,25) usf.

Schließlich stellt er vorbereitende Überlegungen zur Harmonielehre an. Dazu gehören Teilbarkeitsüberlegungen (52,28-55,5) wie: Sind n, m zwei natürliche

Zahlen, ist $n>m + 1$, und ist n-m ein Teiler von n, dann ist n-m auch ein Teiler von m.

Überlegungen zu zusammengesetzten Intervallen (55,6-56,22) führen auf das Ergebnis: $(n : k) (k : l) = n : l$

Am Ende dieses Abschnittes erwähnt er in Worten die Summenformel für eine endliche Anzahl von Termen einer arithmetischen Reihe $a_1,..., a_n$, $a_k = a_1 + (k – 1)d$, d konstant (56,11-17):

Die Summe $s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$.

3. Kapitel: Zahlen im geometrischen Kontext, insbesondere figurierte Zahlen und geometrische deutbare Produkte von Zahlen (56,23 - 98,13)

Am Anfang stehen die Definitionen von geradlinigen (euthygrammikós), linearen (euthymetrikós) und Flächenzahlen (arithmòs epípedos): Es sind Zahlen, die keine Flächenfigur bilden, von der Eins in gerader Linie gemessen werden bzw. durch die Anordnung der in ihr enthaltenen Einheiten eine Fläche bilden. Eins und Punkt entsprechen einander.

Die erste große Gruppe der Flächenzahlen bilden die Vieleck- oder Polygonalzahlen (arithmoì polygónioi 61,27-62,1), beginnend mit den Dreieckzahlen (trígonos arithmós 58,26f.), Viereckzahlen (tetragonikòs arithmós 59,22), Fünfeckzahlen (pentagonikòs arithmós 60,15f,) usf. Iamblichos trennt nicht scharf zwischen dem arithmetischen Begriff, der Zahl, und dem geometrischen Begriff, der Flächenfigur. Tetrágonos kann das Viereck bezeichnen, aber auch die Viereckzahl, und zwar wegen der symmetrischen Anordnung der Einsen bei Iamblichos stets das Quadrat bzw. die Quadratzahl. Der Anordnung liegt die pythagoreische Rechensteinchen- oder Psephoi-Arithmetik zugrunde (Becker 1966, 40-44).

Es entstehen folgende Zahlenfolgen:

Dreickeckszahlen	1	3	6	10	15	21	28	usf.
Viereckszahlen	1	4	9	16	25	36	49	usf.
Fünfeckszahlen	1	5	12	22	35	51	70	usf.
Sechseckszahlen	1	6	15	28	45	66	91	usf.

Iamblichos erklärt deren arithmetische bzw. geometrische Erzeugung durch Summenbildung bzw. durch Anlegung von Gnomen, d. h. Winkelhaken, die aus einem p-Eck ein ähnliches $(p + 1)$-Eck entstehen lassen.

Die Dreieckzahlen ergeben sich durch schrittweises Summieren (ohne Auslassung) der natürlichen Zahlen: 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3 usf., die Quadrat- oder Viereckzahlen durch schrittweises Summieren der ungeraden Zahlen einschließlich der 1, indem man also immer eine Zahl auslässt: 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5 usf. Allgemein erhält man die p-Eck-Zahlen, indem man p-3 Zahlen jeweils auslässt oder mit der Differenz p-2 voranschreitet: 1, 1 + (p – 1), 1 + (p – 1) + (2p – 3) usf. (Tropfke 1980, 346).

Vielecke können in Dreiecke aufgelöst werden, werden also umgekehrt von diesen gebildet. Entsprechend können die Vieleckzahlen aus Dreieckzahlen erzeugt werden (68,27-72,2): Eine p-Eckzahl entsteht aus der Dreieckzahl derselben Spalte und dem (p-3)-fachen der vorangehenden Dreieckzahl. Ist p=6, so gilt z.B. $28 = 10 + 3 \cdot 6$.

Umgekehrt ist eine p-Eckzahl die Summe aus der (p – 1) - Eckzahl derselben Spalte und der vorangehenden Dreieckzahl. Ist p=5, so gilt z.B. $51 = 36 + 15$.

In seine Ausführungen über Vieleckzahlen hat Iamblichos gegenüber Nikomachos den wichtigen Einschub über die so genannte *Blume (epánthema) des Thymaridas* (62,19) eingefügt, in der gezeigt wird, wie ein spezielles lineares Gleichungssystem mit unbestimmt vielen, also n linearen Gleichungen gelöst wird (62,18-68,26) (Tropfke 1980, 391f.). n Größen mögen die Summe s ergeben: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = s$

Eine von ihnen, etwa die erste x_1, werde zu jeder der anderen n-1 Größen addiert:

$$\begin{array}{lllll} 1 & + & x_2 & & & = a_1 \\ x_1 & + & & x_3 & & = a_2 \\ x_1 & + & & & x_n & = a_{n-1} \end{array}$$

Dann gilt: $x_1 = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} - s}{n-2}$

Denn $x_1 + x_2 + x_1 + x_3 + ... + x_1 + x_n - s = ((n - 2) x_1 + s) - s = (n - 2) x_1$

Unsere Übersetzung folgt der Textrekonstruktion Nesselmanns. Pistellis Text ergibt in moderner Umsetzung für $n = 3 : s = a_1 + a_2 - x_1$. Diese Gleichung ist zwar richtig, für n>3 jedoch nicht mehr textkonform zu verallgemeinern. x_1 wird die dividierte Differenz zugeordnet, nicht s.

Iamblichos rechnet zwei Beispiele für n=4 vor (Heath 1921, 95f.):

1) $x_1 + x_2 = 2 (x_3 + x_4)$, $x_1 + x_3 = 3 (x_2 + x_4)$, $x_1 + x_4 = 4 (x_2 + x_3)$,
also $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 (x_2 + x_3)$.
Man wähle s = 120, dann ergibt sich als Lösungsquadrupel:
73, 7, 17, 23 (Tropfke 1980, 391f.).

2) $x_1 + x_2 = \frac{3}{2} (x_3 + x_4)$, $x_1 + x_3 = \frac{4}{3} (x_2 + x_4)$, $x_1 + x_4 = \frac{5}{4} (x_2 + x_3)$.
Man wähle s = 1088, dann ergibt sich als Lösungsquadrupel:
229, 149, 131, 121.

Die zweite große Gruppe der Flächenzahlen sind diejenigen Zahlen, die sich als Produkte zweier gleicher oder ungleicher Faktoren darstellen lassen. Danach gibt es zwei Arten dieser Zahlen, die ähnliche, gleichseitige oder Quadratzahl (hómoios 82,11; idiomékes 82,10; tetrágonos, dynamis 82,6) und die unähnliche (anhómoios), in zwei verschiedene Faktoren zerlegte Zahl. Diese Ähnlichkeit hat nichts mit der Definition VII, 21 in den *Elementen* Euklids zu tun, wonach Flächenzahlen ähnlich sind, wenn ihre Seiten in Proportion stehen. Iamblichos kritisiert Euklid, dass er im zweiten Fall keine weitere Unterscheidung eingeführt hat (74,23-75,4). Er selbst unterscheidet zwischen einer ungleichseitigen oder Rechteckzahl (heteromékes) (Def. 74,6-7), deren Faktoren sich um Eins unterscheiden, und einer länglichen (promékes) Zahl (74,28), deren Faktoren sich um mehr als Eins unterscheiden.

Zunächst untersucht er die Erzeugungsweise der beiden Arten je für sich. Die Quadratzahlen entstehen durch Aufsummierung der ungeraden Zahlen ab Eins, die Rechteckzahlen durch Aufsummierung der geraden Zahlen ab Zwei (75,11-15). Die Quadratzahlen ergeben sich als Summe der Zahlen einer Doppelbahn (díaulos) (76,7-17):

$$1 + 2 + ... + (n - 1) + n + (n - 1) + ... + 2 + 1 = n^2$$

Sodann untersucht Iamblichos die Bildung von Quadrat- und Rechteckzahlen durch Verbindung beider Arten miteinander (80,9- 85,9). Zum Beispiel gilt:

$n(n + 1) - n^2 = n$ (84,8 - 10)
$\frac{n (n+1) - n (n-1)}{n^2 - (n-1)^2} = \frac{2n}{2n-1}$ (84,13 - 17)
$n^2 + 2 (n (n + 1)) + (n + 1)^2 = (2n + 1)^2$ (84,18 - 24)
$n (n +1) + 2 (n + 1)^2 + (n + 1)(n + 2) = (2n + 2)^2$ (84,27 - 85,3)

Ein drittes Thema ist der Zusammenhang zwischen Quadrat-, Rechteck- und figurierten Zahlen. Zum Beispiel gilt:

$n^2 + n (n + 1) = \frac{2n (2n+1)}{n}$ (86,1 - 2)

Die Hälften der Rechteckzahlen $n(n + 1)$ sind die Dreieckzahlen $n (n + 1)/2$ (86,14 - 16).

Iamblichos vergleicht arithmetische und geometrische Folgen miteinander: Gleiche Differenzen zwischen aufeinander folgenden Termen ziehen zwischen diesen verschiedene Verhältnisse nach sich. Gleiche Verhältnisse dort ziehen verschiedene Differenzen nach sich. Besonderes Interesse bringt er der von den Pythagoreern geschätzten Zahl 10 entgegen, deren Rolle er bei der Erzeugung ihrer Potenzen untersucht (88,10-90,2), bevor er weitere Zusammenhänge zwischen den Quadrat- und den figurierten Zahlen vorträgt. Zum Beispiel gilt:

$2n (2n + 2) + 1 = (2n + 1)^2$

$(2n - 1) (2n + 1) + 1 = (2n)^2$ (90,12 - 14)

$\frac{8n(n+1)}{2} + 1 = (2n + 1)^2$ (90,18f.)

$1 : n^2 = n^2 : (n^2)^2$ (90,21 - 23)

Einen eigenen, bei Nikomachos nicht auftretenden Abschnitt widmet er dem unterschiedlichen Verhalten von Flächenzahlen und zugehörigen geometrischen Größen, wenn es um Kommensurabilität und Inkommensurabilität von Seite (pleurá) und zugehöriger Diagonale (diámetros) geht (91,3-93,7. Die Betrachtungen finden sich freilich schon beim Platoniker Theon von Smyrna (2. Jh. n. Chr.) (Heath 1921, 91f.; Cantor 1922, 436f.). Während Seite und Diagonale eines geometrischen Quadrates zueinander inkommensurabel sind, also kein gemeinsames Maß haben und damit kein rationales, also in (natürlichen) Zahlen ausdrückbares Verhältnis, ist dies bei den von Iamblichos definierten Seiten- und Diagonalzahlen nach Konstruktion der Fall. Angesichts des geometrischen Vorbildes und der unmittelbaren Gegenüberstellung scheint es näher liegend zu sein, von Diagonal- anstatt von Diametralzahlen zu sprechen, wie es Cantor oder Robbins und Karpinski (Nicomachus 1926, 130) tun: Um Durchmesser im modernen Sinn geht es nicht.

Iamblichos beginnt mit dem Paar 1, 1 und erzeugt rekursiv neue Diagonal- d_n und Flächenzahlen a_n nach folgender Vorschrift: $d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}$, $a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$

So entstehen aus 1, 1 die Paare 3, 2; 7, 5; 17, 12 usf. Ihre Verhältnisse bilden Näherungswerte für $\sqrt{2}$. Dabei gilt der Satz: $d^2 = 2a^2 \pm 1$. Tatsächlich gilt: 9 = 8 + 1, 49=50-1, 289 = 288 + 1 usf.

Der letzte Abschnitt im dritten Kapitel ist der Körperzahl (stereòs arithmós) gewidmet, also Produkten aus drei Faktoren mnp oder Zahlen, die aus der Summierung dreidimensional angeordneter Vieleckzahlen entstehen (93,3-98,13). Je nach Gleichheit oder Verschiedenheit der drei Faktoren heißen sie Kubus bzw. Würfel (kybos), Parallelepiped (parallelepípedos), Ziegel (plinthís) usf. oder Pyramiden, abgestumpfte Pyramiden usf. Ein Würfel wäre $2 \cdot 2 \cdot 2=8$, ein Ziegel $4 \cdot 4 \cdot 3=48$ (zwei gleiche und eine kleinere Seite).

Ausführlich geht Iamblichos auf Pyramiden ein, die mit Eins beginnen können, aber auch mit einem Gnomon, also abgestumpft sein können. Ist die Spitze in Eins und nimmt man als Basen etwa die Fünfeckzahlen (1), 5, 12, 22, 35, 51 usf., so ergeben sich folgende Pyramiden mit fünfeckiger Basis: 6, 18, 40, 75, 126 usf.

Von Interesse sind der Zusammenhang zwischen Quadrat- und Kubikzahlen bzw. deren Entstehung. Die n-te Kubikzahl ist die Summe von n aufeinander folgenden ungeraden Zahlen. Z.B. gilt: $4^3 = 64 = 13 + 15 + 17 + 19$ (97,14 - 20).

$n^2 \cdot n^2 = (nm)^2$, $n^3 \cdot m^3 = (nm)^3$, $n^3 \cdot n^3 = (n^2)^3 = (n^3)^2$ (98,2-5)

4. Kapitel: Proportionen (98,14 – 125,13)

Iamblichos unterscheidet vier Begriffe: schésis Relation, lógos Verhältnis, analogía Proportion, mesótes Mittel. Sie hängen folgendermaßen zusammen:

Zwischen zwei gleichartigen Termen (homogeneîs hóroi) kann eine *Relation* bestehen, z.B. zwischen zwei (arithmetischen) Größen (posá) oder den Zahlen dieser Größen. Diese Relation kann die Differenz zwischen größerer und kleinerer Zahl sein oder deren Verhältnis. Das *Verhältnis* zweier Größen ist also eine spezielle Relation zwischen diesen. Diese Definition des Iamblichos entspricht der Definition Euklids (Elemente V, 3), ein Verhältnis sei eine gewisse Relation zwischen zwei (geometrischen) Größen (megéthe). Wie Nikomachos (XXI, 3) bezieht Iamblichos ein Verhältnis auf Terme, nicht auf solche Größen, da sie es mit Zahlen zu tun haben.

Eine *Proportion* ist die Gleichheit zweier (mehrerer) Verhältnisse. Bestimmte Proportionen heißen Mittel (mesótetes). Ein *Mittel* ist also – bis auf das arithmetische – eine spezielle Proportion. Dieser Sprachgebrauch unterscheidet sich vom modernen Sprachgebrauch insofern, als das antike Mittel die Bedingungsgleichung für die Größe b ist, während heute die Größe b als arithmetisches, geometrisches oder harmonisches Mittel bezeichnet wird.

Im Anschluss an Nikomachos definiert und erläutert Iamblichos zehn Mittel und gibt jeweils das kleinstmögliche Zahlentripel an, das ein Mittel erfüllt. Zum leichteren Verständnis übersetze ich im Folgenden wie Tropfke die sprachlichen Formulierungen in algebraische Formelsprache (Tropfke 1980, 328). Seien also a, b, c drei paarweise verschiedene natürliche Zahlen, so dass $a > b > c$.

Das *erste Mittel* ist das *arithmetische Mittel* (Def. 101, 12-17), das als Gleichheit zwischen zwei Relationen definiert ist, die keine Verhältnisse, sondern Differenzen sind: $a-b = b-c$, z.B. für 3, 2, 1.

Nikomachos spricht dennoch von Proportion (XXI, 2), Iamblichos von Mittel. Beide formulieren eine Zusatzbedingung, die den Zusammenhang mit Verhältnissen, nicht aber Proportionen wahrt, von Tropfke jedoch nicht erwähnt wird: $a : b > b : c$

Keiner der beiden Autoren gibt dafür eine Begründung, die freilich leicht zu erschließen ist. Die Gleichheit der Verhältnisse ist im Falle gleicher Differenzen nur bei Gleichheit der Zahlen erfüllbar. Das führte auf die Gleichung $0 = 0$. Die Null war aber keine Zahl für die Griechen. Die beiden Autoren erwähnen nicht, dass die Differenzengleichheit allerdings äquivalent zu einer Proportion ist (Busch in Nikomachos 1993, 116): $b : b = (a – b) : (b – c)$

Zwei Folgerungen seien hervorgehoben:

1) Die Erzeugung der Polygonalzahlen durch Addition dreier geeigneter Zahlen einer arithmetischen Folge, d.h. eines arithmetischen Mittels;
2) die letztmögliche Quersumme der Summe dreier aufeinander folgender Zahlen $n, n + 1, n + 2$ ist 6, falls $n = 3k + 1$, $k=1, 2, 3$ usf.
   Denn $3 (3k + 1) + 3 = 9k + 6$

Diese Gleichung bedeutet zugleich, dass sich die Quersumme nach Abzug der Vielfachen von 9 sofort als 6 ergibt (104, 6-8).

Das *zweite Mittel* ist das *geometrische Mittel* (Def. 104, 19-24): $a : b = b : c$, z.B. für 4, 2, 1.

Folgerungen: $ac = b^2$

Ist allgemein $a : b = c : d$, so gilt $ad = bc$ (106, 11-15)

Das *dritte Mittel* ist das *harmonische Mittel* (Def. 107, 23-28):
$a : c = (a – b) : (b – c)$, z.B. für 6, 4, 3.

Folgerungen: 1) Die Zusammensetzung der Oktave aus Quarte und Quinte;
2) $b(a + c) = 2ac$ (111, 26-28)

Die folgenden drei Mittel seien von Archytas und Hippasos erfunden worden. Das *vierte Mittel* ist das *zum harmonischen subkonträre* (hypenantía) *Mittel* (Def. 113, 22-25):

$a : c = (b-c) : (a-b)$, z.B. für 6, 5, 3.

Denn Vorder- und Hinterglied des rechten Verhältnisses des harmonischen Mittels sind miteinander vertauscht.

Das *fünfte Mittel* ist ein *zum geometrischen Mittel subkonträres Mittel* (Def. 114, 26-28):

$b : c = (b - c) : (a - b)$, z. B. für 5, 4, 2

Der Name beruht auf der Tatsache, dass die Gleichung des geometrischen Mittels $a : b = b : c$ genau dann gilt, wenn $b : c = (a - b) : (b - c)$

Im fünften Mittel sind Vorder- und Hinterglied des rechten Verhältnisses dieser Proportion miteinander vertauscht.

Folgerungen: $b^2 = 2bc$, $ab = 2ac$ (115,4-7) Diese Beziehungen sind nur im Sonderfall $b : c = 2$ gültig (D'Ooge in Nicomachus 1926, 283 Anm. 1).

Das *sechste Mittel* ist das andere, *zum geometrischen Mittel subkonträre Mittel* (Def. 115, 11-13): $a : b = (b - c) : (a - b)$, z.B. für 6, 4, 1

Es verwendet die linke der geometrischen Proportion, aber wie im Falle des fünften Mittels das invertierte rechte Verhältnis der zum geometrischen Mittel äquivalenten Proportion.

Die letzten vier Mittel seien von den jüngeren Pythagoreern um Myonides und Euphranor hinzugefügt worden. Das *siebte Mittel* entsteht aus dem vierten (Def. 116, 14-16):

$a : c = (a - c) : (b - c)$, z.B. für 9, 8, 6

Folgerung: $ab : bc = a : c$ (116, 20-24) Die Proportion gilt allgemein.

Das *achte Mittel* entsteht aus dem fünften (Def. 116, 24 – 117, 1):

$a : c = (a - c) : (a - b)$, z. B. für 9, 7, 6

Folgerung: $a : c = (ab) : (bc)$ (117, 6-8) Die Proportion gilt allgemein.

Das *neunte Mittel* entsteht aus dem sechsten (Def. 117, 9-11):

$b : c = (a - c) : (b - c)$, z.B. für 7, 6, 4

Folgerung: $(ab) : (ac) = b : c$ (117, 11-14) Die Proportion gilt allgemein.

Das *zehnte Mittel* entsteht aus dem harmonischen (Def. 117, 20-23):

$b : c = (a - c) : (a - b)$, z.B. für 8, 5, 3

Folgerung: bc = (a – c)(a – b) (117, 26-118, 2) Tatsächlich ist die Proportion äquivalent zu a = b + c, das heißt a – c = b, a – b = c. Die Vorder- und Hinterglieder der gleich gesetzten Verhältnisse sind gleich, wie Iamblichos richtig anmerkt.

An das Ende seiner Ausführungen über Proportionen stellt Iamblichos entsprechend seinem Vorbild Nikomachos (XXIX, 1) die *vollkommenste Proportion* (Def. 119, 3-12):

a : $\frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b}$: b, z.B. für 12, 6 (Heath 1921, 76).

Er definiert sie im Anschluss an Platon, Timaios 36 A-B (Krafft 1971, 349): Das arithmetische Mittel (9) übertrifft um dieselbe Zahl (3) den kleineren Term (6), um die es vom größeren Term (12) übertroffen wird. Das harmonische Mittel (8) übertrifft um ein Drittel (2) des kleineren Terms (6) diesen Term, wie es um ein Drittel (4) des größeren Terms (12) von diesem übertroffen wird.

Diese Proportion verbindet die drei ersten, grundlegenden Mittel. Iamblichos spricht deshalb über die harmonischen Intervalle Quarte, Quinte, Oktave und die Zusammensetzungen aus ihnen. Hier erzählt Iamblichos die hübsche, aber leider physikalisch falsche und daher sicherlich erfundene Anekdote, dass und wie Pythagoras diese Intervalle durch das Klingen von Schmiedehämmern gefunden haben soll (121, 13- 122, 2). Boethius hat sie wiederholt (*De institutione musica* I, 10) (Van der Waerden 1979, 368f.) und in seiner Nachfolge viele Renaissance-Autoren wie Gregor Reisch oder Athanasius Kircher (Knobloch 2001, 252, 258).

Epilog (125, 14-25)

Der kurze Epilog stellt die Lehre von den Zahlen in einen ethischen und theologischen Kontext und kündigt entsprechende Einführungen in die Musik, Geometrie und Sphärik an, also in die anderen drei quadrivialen Disziplinen. Diese Einführungen sind verloren gegangen.

Literatur

Textausgabe

Iamblichi *In Nicomachi arithmeticam introductionem liber*, ad fidem codicis Florentini edidit Hermenegildus Pistelli (MDCCCXCIV). Editionem addendis et corrigendis adiunctis curavit Udalricus Klein. Stuttgart 1975. (Unsere Textvorlage).

Übersetzungen

Giamblico, *L'introduzione all'aritmetica di Nicomaco*. In: *Giamblico, Il numero e il divino: La scienza matematica comune, L'introduzione all' aritmetica di Nicomaco, La teologia dell' aritmetica. Introduzione, testo greco, traduzione, note, bibliografia e indici* a cura di Francesco Romano. Milano 1995, S. 203-391. (Italienisch-griechische Ausgabe unter Zugrundelegung des Textes von Pistelli / Klein).

Iamblique. *Commentaire à l'Introductio arithmetica de Nicomaque. Introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire* par N. Vinel. Pisa (vom Verlag Fabrizio Serra editore als ‚Forthcoming' angekündigt).

Bemerkungen zur vorliegenden Übersetzung:

Zur leichteren Orientierung wurden der Text inhaltlich durch Absätze gegliedert und die Seitenzahlen der Pistelli/Klein-Ausgabe – durch Fettdruck hervorgehoben und in eckige Klammern [ ] gesetzt – an den entsprechenden Stellen des Übersetzungstextes eingefügt. Alle Hinzufügungen mit Ausnahme der deutschen Überschriften innerhalb des Übersetzungstextes durch die Übersetzer wurden in spitze Klammern < > gesetzt. Dazu gehören die Nachweise von Zitaten, sinngemäß im Deutschen ergänzte Wörter sowie zum besseren Verständnis Zahlenbeispiele oder moderne Formelschreibweise.

Literatur

Forschungsliteratur und weitere Texte

Becker, Oskar. 1966, *Das mathematische Denken der Antike*. 2., durchgesehene Auflage mit einen Nachtrag von G. Patzig. Göttingen.

Bechtle, Gerald. 2006. *Iamblichus, Aspekte seiner Philosophie und Wissenschaftskonzeption, Studien zum späteren Platonismus*. Sankt Augustin.

DK = *Die Fragmente der Vorsokratiker, Griechisch und Deutsch von Hermann Diels*. Auflage herausgegeben von Walther Kranz, 12. Unveränderte Auflage. Dublin – Zürich.

Heath, Thomas. 1921. *A history of Greek mathematics. Vol. I From Thales to Euclid*. Oxford.

Knobloch, Eberhard. 2001. *Musik*, in: *Maß, Zahl und Gewicht, Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung*, hrsg. von Menso Folkerts, Eberhard Knobloch, Karin Reich. Wiesbaden, S. 245-265.

Krafft, Fritz. 1971. *Geschichte der Naturwissenschaft I, Die Begründung einer Wissenschaft von der Natur durch die Griechen*. Freiburg.

Larsen, Bent Dalsgaard. 1972. *Iamblique de Chalcis, Exégète et Philosophe*. Aarhus.

Nicomachus Gerasenus Pythagoreus. 1866. *Introductionis arithmeticae libri II. Recensuit Ricardus Hoche. Accedunt codicis Cizensis problemata arithmetica*. Leipzig.

Nicomachus of Gerasa. 1926. *Introduction to Arithmetic*, Translated into English by Martin Luther D'Ooge, with studies in Greek arithmetic by Frank Egleston Robbins and Louis Charles Karpinski. New York. (Nachdruck 1972).

Nikomachos von Gerasa. 1993. *Einführung in die Arithmetik*, übersetzt von Thomas Busch. Dissertation Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

O'Meara, Dominic J. 1990. *Pythagoras revived, Mathematics and Philosophy in Late Antiquity*. Oxford.

Tropfke, Johannes, 1980. *Geschichte der Elementarmathematik*, 4. Auflage Band 1: Arithmetik und Algebra, vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin-New York.

Van der Waerden, Bartel Leendert. 1979. *Die Pythagoreer, Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*. Zürich-München.

Glossar

(Die Seitenzahlen beziehen sich auf die Ausgabe von Pistelli/Klein)

adiaphóretos nicht verteilt
adiastasía Stetigkeit
aiónios ewig
álogos inkommensurabel, irrational
ameíbomai tauschen, erwidern, vergelten
amélei wirklich, sicherlich
analogéo in einem Verhältnis stehen
analogía Proportion
analogikós auf mathematischen Verhältnissen beruhend
anaphorá Bezug
anhómoios unähnlich (82,12)
  arithmós Zahl, die nur in zwei verschiedene Faktoren zerlegt werden kann
antexetazómenos gemessen, verglichen mit
anthypakoúo entsprechen
aóristos unbegrenzt
apartéo vollenden
aphilókalon widersprüchlich zur Liebe des Schönen
aphomoíosis Angleichung
apísosis Ausgleich
apoleípo unversehrt lassen
aposózo bewahren
apsaustía Fehlen von Berührung
árthron Glied
ártios (*arithmós*) gerade (Zahl)
artiotagés gesetzt in eine Reihe von geraden Zahlen
áschetos unbeeinflussbar
asymmetría Inkommensurabilität
athroisthèn plêthos gesammelte Menge, Summe

choretikós fähig zu enthalten

diaíresis Teilung
diamoné Dauer
diaphoréo in Stücke zerlegen

diastatós Ausdehnung, Dimension haben
diástema Dimension; Abstand
diatribé Vorlesung
díaulos Doppelbahn
dokís Stäbchen
doryphoréo flankieren
dynámei in Potenz
dynamis Quadrat (82,6), Produkt (zweier Zahlen)

égkrasis Mischung
eidopoíesis Artstiftung
eidopoiós formbildend
ektíthemi absondern, für sich betrachten
ellipès (*arithmós*) defizient(e Zahl)
emmelés taktvoll, harmonisch
émphasis Nachdruck, Verdeutlichung
en arithmô lógos Zahlenverhältnis
énnoia Begriff, Vorstellung
epánthema Vorzüglichkeit
epì plátos nach rechts hin
epignómon Schiedsrichter
epileípo eine Ausnahme bilden
epimerés überteilend
epimerótes Qualität, überteilend zu sein
epimórios (*lógos*) überteilig(es Verhältnis)
epínoia Begriff, Vorstellung, Erkenntnisweise
epíplastos falsch
episoreía Anhäufung
episoreío summieren
epistéme Wissenschaft
epistetós wissenschaftlicher Gegenstand
episynthesis Zusammensetzung
epítedes absichtlich, geflissentlich
epitrécho dicht hinterher rennen
epitrimerés ein Ganzes und drei Viertel enthaltend
epítritos ein Ganzes und ein Drittel enthaltend
eúlogos in vernünftiger Weise
eumáreia Leichtigkeit

Glossar

euthygrammikós geradlinig
euthymetrikós linear

génesis Erzeugung
genikós allgemein
gennétor Erzeuger, Vater
grammiká geometrische Dinge

harmonía Harmonie
heteromékes ungleichseitig (82,8), Rechteck, Rechteckzahl (aus zwei Faktoren n, n + 1)
hístemi aufstellen, hinstellen
historô untersuchen
hoioneí gleichsam
hómoios ähnlich (82,11)
  arithmós Quadratzahl
homotagés in derselben Reihe, Linie angeordnet
hopóstos welcher Platz in numerischer Ordnung
hóros Term
hyperpaío übertreffen
hypertelès (*arithmós*) abundant(e Zahl)
hyphaíno erzeugen
hypólogos Hinterglied (in Verhältnissen) (Tropfke 1937, 20)
hysplex Startmaschine

idíoma spezifische Eigenschaft, Qualität
idiomékes gleichseitig (82,10)
ídios ihrer Eigenart nach

katà anastrophén umgekehrt
katà trópon methodisch
katálepsis Begreifen
katholikós allgemein
klêsis Name, Nenner
klêsis Ruf, Benennung

lêxis Zuteilung, Ergebnis
lógon échein Bedeutung haben

Glossar

lógos Verhältnis
loipós übrig bleibend

mathémata mathematische Wissenschaften
méchri pantós immer weiter
mégethos (geometrische) Größe
mêkos Länge
mekýno multiplizieren
merízomai sich teilen
merízo pará teilen durch
méros Teil
mesótes Mittel
mórion Nenner, Bruch

óntos genésthai wahres Sein haben

pánte in jeder Weise
parádeigma Grundmuster
paradídomi lehren
paragígnomai hinzukommen
paralambáno erlernen
paraspízo flankieren
paronýmos mit abgeleitetem Namen
pelíkon (geometrische) Größe, Großes (8, 5)
pelikótes (geometrische) Größe
perissakôs multipliziert mit einer ungeraden Zahl
perissós (*arithmós*) ungerade (Zahl)
perissotagés gesetzt in eine Reihe von ungeraden Zahlen
phíloi arithmoí befreundete Zahlen
philothéoros Betrachtung, Nachsinnen üben
plásis Erfindung, Bildung
pléres voll, ganz
plêthos Menge, (arithmetische) Größe
pleûra Quadratwurzel
poión Qualität
poiós irgendwie beschaffen
pollaplásion Vielfaches
póso der Quantität nach

posón (arithmetische) Größe, Vieles (8, 3)
posótes (arithmetische) Größe
prokopé Fortgang, Zunahme, Fortschreiten
prólogos Vorderglied (in Verhältnissen) (Tropfke 1937, 20)
promékes länglich (74, 28); Produktzahl, deren zwei Faktoren sich um mehr als eins unterscheiden
prosegoría Benennung, Nennen, Bezeichnung
prosnémo zuteilen
próstagma Anordnung, Befehl, Vorschrift
próthesis Präposition
prótistos allererster
protótypoi Grundformen
psaustós berührt
psilós einfach
pythmén Basis (einer Reihe)
pythmenikaì analogíai proportionale Grundformen
pythmenikós erster in einer Reihe

rhetós rational
rhetótes Rationalität (von Zahlen)

schésis Relation, Beziehung (Tropfke 1980, 327)
schetikós relativ
sképsis Studium, Untersuchung
soredón in Haufen
soreía Summation, arithmetische Progression
spermatikòs lógos Gestaltungsprinzip
sterísko berauben, entziehen
stoicheîon Element
sygkephalaíoma Summe
sygkephalaiô summieren
sygkríno vergleichen, verbinden, zusammensetzen
sylleptikós hilfreich, einander ergänzend
symmetría passende Ausgewogenheit
symphonía Zusammenklang
sýmphonon Zusammenklang
sýmptoma Begebenheit, Unglück
syndiasmós zwei zusammen genommen

synechés fortgesetzt
synthesis Zusammensetzung, Zusammenstellung
syntíthemi zusammen addieren
sýstasis Struktur, Bau
syzygía Verbindung, Kombination
sýzygos zusammengejocht

tà ónta das Seiende
téchne Kunst
technologô vorschreiben als eine Regel der Kunst
technología systematische Behandlung
téleios (*arithmós*) vollkommen(e Zahl)
tetrágonos Viereck (82, 6); Quadrat, Quadratzahl
theórema Untersuchung
theorô untersuchen, wahrnehmen, erkennen
theoria Theorie, Betrachtung
tranóo klar machen
trópos Art, Weise

Namenverzeichnis

(Die Seitenzahlen beziehen sich auf die Ausgabe von Pistelli/Klein)

Danksagung

Wir danken Benedikt Budig für die Hilfe bei der Erstellung des Manuskriptes, Regina Mikosch für die Hilfe bei der Schluss-Redaktion, Beate Noack für die Aufnahme dieses Bandes in die von ihr herausgegebene Reihe Subsidia Classica, Christiane Reitz für die Betreuung der Druckvorbereitung, Svenja Martens für die technische Umsetzung der zweisprachigen Ausgabe und dem Walter de Gruyter Verlag für die Genehmigung, den griechischen Text von Pistelli/Klein wiederabzudrucken.